C - 1 Einführung der reellen Zahlen

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

L. Kronecker

Axiomensystem der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

(i) Axiome der Addition und Multiplikation
(ii) Axiome der Anordnung
(iii) Vollständigkeitsaxiom
(iv) Archimedisches Axiom

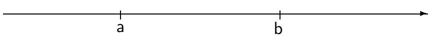
(i) Axiome der Addition und Multiplikation

Siehe Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$

(ii) Axiome der Anordnung

Das Zeichnen "$<$" heißt "links von" auf dem Zahlenstrahl

$a < b$ ist equivalent zu



$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Es gilt genau eine der Beziehungen: (Trichotomie)
   $$a < b, \quad a = b, \quad b < a$$
2. $a < b$ und $b < c \implies a < c$ (transitivität)
3. $a < b \implies a + c < b + c$ (Monotonie bzgl. $+$)
4. $a < b$ und $0 < c \implies a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie bzgl. $\cdot$)

Zahlen link von Null (< 0) heißen negativ, rechts von Null (> 0) heißen positiv.

Definition C.1 ("größer", "kleiner gleich", "größer gleich")

- $a > b \iff b < a$
- $a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$
- $a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$

Definition C.2 (Bezeichnungen)

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offen
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffen
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffen
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\quad \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ $\quad \mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

Betrag einer reellen Zahl

Definition C.3

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad |a| \geq 0 \quad$ und $\quad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

Satz C.4 (1.Dreiecksungleichung und 2.Dreiecksungleichung)

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

(Vergleiche Normeigenschaften)

Bemerkung:

Durch Induktion nach n erhält man die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

(iii) Vollständigkeitsaxiom

Definition C.5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelee Zahl s mit $x \leq s, \ \forall x \in M$ heißt *obere Schranke* von M. Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x \geq t, \ \forall x \in M$, so heißt t *untere Schranke* von M. Die Menge M heißt dann entsprechend *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*. Falls beides, so ist M *beschränkt*.

Definition C.6

m heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* von M ($m = \min M$), wenn $m \in M$ und m untere Schranke von M ist.

Analog definiert man *Maximum*.

Beispiel C.7

$\mathbb{R}^+$ ist nicht nach oben beschränkt, aber nach unten. 0 ist eine untere Schranke. $\mathbb{R}^+$ besitzt aber kein Minimum!
$[a, b]$ besitzt das Minimum a und das Maximum b.
(a, b) enthält weder ein Minimum noch ein Maximum.
b – obere Schranke, a – untere Schranke.

Definition C.8 (Supremum, Infimum)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$
$s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M ($s = \sup M$) $\Longleftrightarrow$
s ist kleinste obere Schranke von M.
$t \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von M ($t = \inf M$) $\Longleftrightarrow$
t ist größte untere Schranke von M.

Alternativ:

$$s = \sup M \quad \Longleftrightarrow \quad (x \leq s, \forall x \in M) \text{ und } (\forall s' < s \ \exists x \in M : s' < x \leq s)$$

Analog für Infimum.

Das *Vollständigkeitsaxiom* von $\mathbb{R}$ sagt:

Jede nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Menge besitzt ein Supremum (Infimum).

Erweiterung

$\inf\{\emptyset\} = +\infty \quad \sup\{\emptyset\} = -\infty$
$\inf\{\mathbb{R}\} = -\infty \quad \sup\{\mathbb{R}\} = +\infty$

Bemerkung:

Besitzt eine Menge ein Maximum, so ist dies gleichzeitig das Supremum.
Besitzt eine Menge ein Minimum, so ist dies gleichzeitig das Infimum.

Beispiel C.9

Sei $M = [0, 1)$. Es folgt $\min M = 0 = \inf M$, $\sup M = 1$.
M besitzt kein Maximum aber ein Minimum.

Definition C.10

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$$

Bemerkung:

In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht! Zum Beispiel hat die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ (es gibt keine größte rationale Zahl kleiner als $\sqrt{2}$).

(iv) Archimedisches Axiom

Dieses wird auch oft als Axiom des Eudoxus gennant.

Sind a und b zwei positive reelle Zahlen, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$na > b$$

Zifferndarstellung reeller Zahlen

Gegeben Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Wir finden $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z_0 \leq a < z_0 + 1$$

Nun teilen wir das Intervall $[z_0, z_0 + 1)$ in 10 gleichlange rechsoffene Teilintervalle. Dann existiert ein $z_1 \in \{0, 1, .., 9\}$, so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} \leq a < z_0 + \frac{z_1 + 1}{10}$$

Nun wird das Intervall $[z_0 + \frac{z_1}{10}, z_0 + \frac{z_1+1}{10})$ in 10 gleichlange rechtsoffene Teilintervalle zerlegt. Wie oben findet man eine ganze Zahl z_2, so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2 + 1}{10^2}$$

usw...

Definition C.11

hierfür schreibt man kurz:

$$a = z_0.z_1z_2...$$

und nennt die rechte Seite *Dezimalbruchdarstellung* der positiven reellen Zahl a. Die Zahlen $z_i \in \{0, 1, ..., 9\}, i = 1, 2, ...$ heißen *Ziffern*.

Im Falle $a < 0$ wendet man die obige Konstruktion auf $-a$ an und erhält $-a = z_0.z_1z_2....$ Dafür schreibt man $a = -z_0.z_1z_2....$

Beispiel C.12

Die Dezimalbruchdarstellung $a = 35.704...$ bedeutet

$$35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{4}{10^3} \leq a < 35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

Beispiel C.13

$-1/4 = -0.2500...$, wobei alle weiteren Ziffern 0 sind. In diessem Fall sagt man der Dezimalbruch sei *endlich* und schreibt einfach $-1/4 = -0.25$.

Beispiel C.14

In der Darstellung $a = 0.727272...$ wiederhole sich ständig die Ziffernfolge 72. Man sagt der Dezimalbruch sei *periodisch* und schreibt

$$a = 0.\overline{72} \quad \text{oder} \quad a = 0.(72)$$

Hieraus kann man a als Bruch ermitteln: $100a - a = 72.\overline{72} - 0.\overline{72} = 72$. Es folgt also $a = 72/99 = 8/11$.

Veralgemeinerung der Beispiele

Jede reelle Zahl a ist als Dezimalbruch darstellbar. Dieser ist genau dann endlich oder periodisch, wenn die Zahl a *rational* ist.

g-adische Darstellung

Der Dezimalbruchdarstellung von $a \in \mathbb{R}$ liegt die fortlaufende Teilung eines Intervalls in 10 gleichlange Intervalle zugrunde.

Statt der Grundzahl $g = 10$ kann man auch jede andere natürliche Zahl $g \geq 2$ zugrundelegen. Hierdurch erhält man die g-adische Darstellung von a die man z.B. in der Form $a = z_0.z_1z_2...|_g$ schreibt, womit die Einschließung

$$z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2 + 1}{g^2}$$

gemeint ist. Hier sind $z_i \in \{0, 1, .., g-1\}$.

Speziell für $g = 2$ ergibt sich die *binare Darstellung* oder *Dualzahldarstellung*, die in Computern intern verwendet wird.

Beispiel C.15

$1/3 = 0.0101...|_2 = 0.\overline{01}|_2$.