Geometrische Bedeutung der Ableitung

Motivation:

Die Kenntnis von Ableitungen ermöglicht verschiedene Aussagen über den Graphen einer Funktion, so zu Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten und Wendepunkten.

Satz C.116 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)

Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion f gilt

1. $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I \iff$ *f ist monoton wachsend (fallend);*
2. $f'(x) = 0$ $\forall x \in I \iff$ *f ist auf I konstant;*
3. $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I \implies$ *ist streng monoton wachsend (fallend).*

Bemerkung:

Ist f streng monoton wachsend, so folgt nicht notwendig $f'(x) > 0$ (vergleiche $f(x) = x^3$).

Bemerkung:

1. Ist f differenzierbar und ξ Extremstelle von f, so ist die Tangente an f in ξ waagerecht.
2. $f(x) = |x|$ hat in $\xi = 0$ ein globales Minimum, es ist aber keine Tangente erklärt.
3. Die Umkehrung von Satz C.118 ist falsch: $\xi = 0$ ist stationärer Punkt von $f(x) = x^3$ $[f'(0) = 0]$, aber keine Extremstelle.
4. Extremstellen können außer in stationären Punkten auch am Rand des Intervalls liegen oder Stellen sein, in denen f nicht differenzierbar ist.

Definition C.117

Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales* (*absolutes*) *Maximum*, wenn $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in D$ gilt.
a heißt dann *globale Maximalstelle*, $f(a)$ *globales Maximum* von f.

$b \in D$ heißt *lokale Maximalstelle*, ($f(b)$ *lokales Maximum*), falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(b) \geq f(x)$ $\forall x \in (b - \delta, b + \delta)$.
Analog erklärt man *Minimalstellen*, *Minimum*.

Maxima und Minima heißen auch *Extrema* (entspr. *Extremstellen*).

Satz C.118 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema, Fermat)

Ist f auf dem offenen Intervall I differenzierbar und hat in $\xi \in I$ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.
(Eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißt auch stationärer Punkt).

Satz C.119 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei I offenes Intervall, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar $(n \geq 2)$.
Weiterhin gelte $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.
Dann gilt:

(a) *Wenn n gerade ist, so liegt in ξ ein lokales Extremum vor.*
- *Ist $f^{(n)}(\xi) > 0$, so ist es ein lokales Minimum.*
- *Ist $f^{(n)}(\xi) < 0$, so ist es ein lokales Maximum.*

(b) *Für ungerades n liegt kein Extremum vor.*

Beispiel C.120

1. Für $f(x) = x^3$ gilt: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, also $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6 \neq 0$; d.h. im Punkt 0 liegt kein Extremum vor.
2. Für $f(x) = x^4$ gilt: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)} = 24$, also $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) > 0$; d.h. im Punkt 0 liegt ein lokales Minimum vor.

Definition C.121 (Konvexität, Konkavität)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

- *konvex* in I, wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

- *konkav* in I, wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Gelten strenge Ungleichungen, so heißt f in I streng konvex bzw. konkav.

Bemerkung:

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf;
konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf.

Bemerkung:

Das Vorzeichen von f'' gibt also Auskünfte über das Krümmungsverhalten des Graphen von $y = f(x)$:

- Ist $f'' > 0$, so ist f' monoton wachsend; also wird f steiler oder wechselt von Fallen zum Steigen. Es liegt also eine Linkskrümmung vor.
- Ist $f'' < 0$, so liegt eine Rechtskrümmung vor.

Beispiel C.124

1. Typische konvexe Funktionen sind $f(x) = x^2$ und $g(x) = \mathbf{e}^x$.
2. Die Funktion $h(x) = \ln(x)$ ist konkav.

Satz C.122

Sei f stetig differenzierbar in I. Dann gilt:

(a) *f ist in I konvex $\iff$ f' ist monoton wachsend auf I*

(b) *f ist in I konkav $\iff$ f' ist monoton fallend auf I*

Satz C.123

Sei f zweimal stetig differenzierbar in I. Dann gilt:

(a)
- *f ist in I konvex $\iff$ $f'' \geq 0$ auf I.*
- *$f'' > 0$ auf I $\implies$ f ist streng konvex in I.*

(b)
- *f ist in I konkav $\iff$ $f'' \leq 0$ auf I*
- *$f'' < 0$ auf I $\implies$ f ist streng konkav in I.*

Definition C.125 (Wendepunkt)

Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen *Wendepunkt* in ξ, falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

Bemerkung:

In einem Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton wachsend und rechts von ξ monoton fallend; wir haben einen Konvex-konkav-Wechsel.
- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Minimum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton fallend und rechts von ξ monoton wachsend; wir haben einen Konkav-konvex-Wechsel.