

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Motivation:

Die Kenntnis von Ableitungen ermöglicht verschiedene Aussagen über den Graphen einer Funktion, so zu Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten und Wendepunkten.

Satz C.116 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)

Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion f gilt

- $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I \iff f$ ist monoton wachsend (fallend);
- $f'(x) = 0 \forall x \in I \iff f$ ist auf I konstant;
- $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I \implies$
ist streng monoton wachsend (fallend).

Bemerkung:

Ist f streng monoton wachsend, so folgt nicht notwendig $f'(x) > 0$ (vergleiche $f(x) = x^3$).



Definition C.117

Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales (absolutes) Maximum*, wenn $f(x) \leq f(a) \forall x \in D$ gilt.

a heißt dann *globale Maximalstelle*, $f(a)$ *globales Maximum* von f .

$b \in D$ heißt *lokale Maximalstelle*, ($f(b)$ *lokales Maximum*), falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(b) \geq f(x) \forall x \in (b - \delta, b + \delta)$.

Analog erklärt man *Minimalstellen*, *Minimum*.

Maxima und Minima heißen auch *Extrema* (entspr. *Extremstellen*).

Satz C.118 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema, Fermat)

Ist f auf dem offenen Intervall I differenzierbar und hat in $\xi \in I$ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.

(Eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißt auch *stationärer Punkt*).



Bemerkung:

- Ist f differenzierbar und ξ Extremstelle von f , so ist die Tangente an f in ξ waagrecht.
- $f(x) = |x|$ hat in $\xi = 0$ ein globales Minimum, es ist aber keine Tangente erklärt.
- Die Umkehrung von Satz C.118 ist falsch: $\xi = 0$ ist stationärer Punkt von $f(x) = x^3$ [$f'(0) = 0$], aber keine Extremstelle.
- Extremstellen können außer in stationären Punkten auch am Rand des Intervalls liegen oder Stellen sein, in denen f nicht differenzierbar ist.



Satz C.119 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei I offenes Intervall, $\xi \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$).

Weiterhin gelte $f'(\xi) = f''(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

- Wenn n gerade ist, so liegt in ξ ein lokales Extremum vor.
 - Ist $f^{(n)}(\xi) > 0$, so ist es ein lokales Minimum.
 - Ist $f^{(n)}(\xi) < 0$, so ist es ein lokales Maximum.
- Für ungerades n liegt kein Extremum vor.

Beispiel C.120

- Für $f(x) = x^3$ gilt: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, also $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6 \neq 0$; d.h. im Punkt 0 liegt kein Extremum vor.
- Für $f(x) = x^4$ gilt: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)} = 24$, also $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) > 0$; d.h. im Punkt 0 liegt ein lokales Minimum vor.



Definition C.121 (Konvexität, Konkavität)

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *konvex* in I , wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

- *konkav* in I , wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Gelten strenge Ungleichungen, so heißt f in I streng konvex bzw. konkav.

Bemerkung:

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf;
konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf.



Satz C.122

Sei f stetig differenzierbar in I . Dann gilt:

- (a) f ist in I konvex $\iff f'$ ist monoton wachsend auf I
- (b) f ist in I konkav $\iff f'$ ist monoton fallend auf I

Satz C.123

Sei f zweimal stetig differenzierbar in I . Dann gilt:

- (a)
 - f ist in I konvex $\iff f'' \geq 0$ auf I .
 - $f'' > 0$ auf $I \implies f$ ist streng konvex in I .
- (b)
 - f ist in I konkav $\iff f'' \leq 0$ auf I .
 - $f'' < 0$ auf $I \implies f$ ist streng konkav in I .



Bemerkung:

Das Vorzeichen von f'' gibt also Auskünfte über das Krümmungsverhalten des Graphen von $y = f(x)$:

- Ist $f'' > 0$, so ist f' monoton wachsend; also wird f steiler oder wechselt von Fallen zum Steigen. Es liegt also eine Linkskrümmung vor.
- Ist $f'' < 0$, so liegt eine Rechtskrümmung vor.

Beispiel C.124

1. Typische konvexe Funktionen sind $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$.
2. Die Funktion $h(x) = \ln(x)$ ist konkav.



Definition C.125 (Wendepunkt)

Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen *Wendepunkt* in ξ , falls $f'(\xi)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

Bemerkung:

In einem Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(\xi)$ in ξ ein lokales Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton wachsend und rechts von ξ monoton fallend; wir haben einen Konvex-konkav-Wechsel.
- Hat $f'(\xi)$ in ξ ein lokales Minimum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton fallend und rechts von ξ monoton wachsend; wir haben einen Konkav-konvex-Wechsel.

