Satz C.126

Ist f auf I konvex (konkav) so ist jedes seiner lokalen Minima (Maxima) auch globales Minimum (Maximum). Ist f sogar streng konvex oder konkav so gibt es nur einen einizgen Minimalpunkt bzw. Minimalwert.

Bemerkung:

Satz C.126 gilt auch in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und ganz allgemeinen Räumen beliebiger Dimension. Er ist von grundlegender Bedeutung in der Optimierung.

Satz C.127 (Taylorsche Formel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi, x \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann besitzt f die folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_n(x,\xi) + R_n(x,\xi)$$

mit dem Taylorpolynom n-ten Grades

$$T_n(x,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_n(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(\xi + \vartheta(x-\xi)\big).$$

Dabei ist ϑ eine von f, n, x, ξ abhängige Zahl mit $0 < \vartheta < 1$ und $\xi + \vartheta(x-\xi)$ eine Stelle zwischen x und ξ.

Der Satz von Taylor

Motivation:

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

$$t(x) = f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi)$$

eine lokale Approximation der Funktion im Punkt ξ durch ein Polynom 1. Grades dar.
Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist $f(x)$ durch Polynome höheren Grades (besser) zu approximieren, wenn f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt.

Bemerkung:

1. Für $n = 0$ liefert die Taylorsche Formel den Mittelwertsatz C.109.
2. Man kann zeigen, dass $T_n(x,\xi)$ das einige Polynom vom Grad $\leq n$ ist, das die Approximationsgüte $O((x-\xi)^{n+1}) = o((x-\xi)^n)$ besitzt.
3. Neben der Restglieddarstellung von Lagrange gibt es weitere Darstellungen des Restgliedes; z.B. die Darstellung nach Cauchy

$$R_n(x,\xi) = \frac{(1-\vartheta)^n (x-\xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}\big(\xi + \vartheta(x-\xi)\big).$$

Satz C.128

Jede auf einem offenen Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion f mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beispiel C.129

1. Sei $f(x) = e^x$, $\xi = 0$; dann ist $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das n-te Taylorpolynom von f in ξ ist

$$T_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Für das Restglied

$$R_n(x,0) = e^{\vartheta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

gilt für $|x| < c$

$$|R_n| \leq e^c \frac{|c|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Sei $f(x) = p(x)$ (Polynom vom Grad $\leq n$). Dann folgt $R_n(x,0) = 0$ für alle x, also ist $T_n(x,0) = p(x)$ für alle x.

Beispiel C.131

1. Die Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

hat den Enwicklungspunkt $x_0 = 1$. Sie konvergiert (geometrische Reihe!) für $|1-x| < 1$, also für $0 < x < 2$ mit dem Wert $\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$.

Potenzreihen

Definition C.130

Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge. Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

heißen *Potenzreihen*, x_0 ihr *Entwicklungspunkt* und a_n ihre *Koeffizienten*.

Bemerkung:

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = x_0$ mit dem Wert a_0.

Satz C.132

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existiert eine Zahl $r \geq 0$ oder $r = \infty$, so daß die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$ absolut konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > r$ divergiert. Dabei heißt $r = 0$, daß sie nur für $x = x_0$ konvergiert, $r = \infty$ heißt, daß sie für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Mann nennt r den Konvergenzradius der Potenzreihe, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ heißt Konvergenzintervall (für $r \neq \infty$).
Für den Konvergenzradius gilt die Cauchy-Hadamardsche Formel

$$r = \frac{1}{\lim(\sqrt[n]{|a_n|})},$$

wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ gesetzt wird.

Bemerkung:

Über die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls, also für $|x - x_0| = r$, ist keine allgemeine Aussage möglich.