Taylorreihen

Definition C.133

Ist f auf D beliebig oft differenzierbar, so läßt sich die *Taylorreihe*

$$T_f(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

von f *bezüglich* ξ hinschreiben.

Bemerkung:

1. Die Taylorreihe muß weder konvergieren noch (im Fall der Konvergenz) die Summe $f(x)$ haben.
2. Nach dem Satz über die taylorsche Formel C.127 konvergiert $T_f(x,\xi)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,\xi) = 0$ ist.

Beispiel C.134

1. Für $f(x) = e^x$, $\xi = 0$ ist $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für beliebiges ξ gilt

$$e^x = e^{\xi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} \qquad \text{(Funktionalgleichung!).}$$

2. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und $\xi = 0$. Es ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n und
$T_f^n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) = 0$ für alle n, also
$R_{n+1}(x,0) = f(x) \not\to 0$ für $n \to \infty$.
Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, läßt sich aber nicht als eine Potenzreihe darstellen.

Bemerkung:

1. Eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k, \qquad |x-\xi| < r$$

ist bereits die Taylorreihe von f bezüglich ξ.
2. Um eine Funktion als Reihe darzustellen, müssen nicht immer die Ableitungen berechnet werden; man kann auch bekannte Reihen umformen, um die Taylorreihe zu erhalten.

Definition C.135

Eine Funktion $f(x)$ heißt am Punkt ξ *reell analytisch* falls sie dort unendlich oft differenzierbar ist und ihre Taylorreihe $T(x,\xi)$ für alle x aus einer Umgebung von ξ gegen $f(x)$ konvergiert.

Bemerkung:

1. Für jedes ξ bildet die Menge dieser Funktionen einen Ring, d.h. Summen, Differenzen und Produkte haben diesselbe Eigenschaft.
2. Die Verkettung (Verknüpfung) von zwei analytischen Funktionen ist wieder eine analytische Funktion.

Fixpunkt-Iteration

Motivation:

Iterationsverfahren sind Verfahren der schrittweisen Annäherung. Sie gehören zu den wichtigsten Methoden in der Numerik zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen, z.B. Bisektionsverfahren.
Verfahren zur iterativen Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq R$, haben meistens die Form

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \text{ (FPI)}.$$

und heißen Fixpunkt-Iterationen mit Verfahrensfunktion ϕ.

Die Bezeichnung Fixpunkt-Iteration ist wie folgt begründet:
Erzeugt die Iterationsvorschrift (FPI) eine konvergente Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und ist ϕ stetig, so folgt:

$$x^* := \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \phi(x^*).$$

Das Verfahren konvergiert also und der Grenzwert x^* hat die Eigenschaft $x^* = \phi(x^*)$ und ist damit ein Fixpunkt der Verfahrensfunktion ϕ.
Wie gewinnt man die Verfahrensfunktion ϕ?
Man formt die Gleichung $f(x) = 0$ in eine äquivalente Gleichung der Form $x = \phi(x)$ um. Dies kann auf vielfältige Art geschehen und hat großen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Fixpunkt-Iteration.

Definition C.136

Eine Abbildung $\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf D, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass:

$$\forall x, y \in D : |\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

L heißt *Lipschitz-Konstante*.
Kann man $L < 1$ wählen, so heißt die Abbildung ϕ kontrahierend und L nennt man dann auch Kontraktionskonstante von ϕ.

Bemerkung:

1. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig auf D.
2. Man beachte, dass die Kontraktionseigenschaft nur durch eine Abschätzung $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$ mit $L < 1$ gesichert ist.

Satz C.137

Falls eine Funktion ϕ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist, so besitzt sie die Lipschitz-Konstante

$$L = \sup\{|\phi'(\xi)| : a \leq \xi \leq b\}.$$

Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|\phi(y) - \phi(x)| = |\phi'(\xi)(y - x)| = |\phi'(\xi)|\,|y - x| \leq L\,|y - x|$$

mit $\xi \in (a, b)$.