Satz C.138 (Banachscher Fixpunktsatz)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung von D in sich (d.h. $\phi(D) \subseteq D$) mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) *Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von ϕ in D.*

(b) *Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*.*

(c) *Es gelten die Fehlerabschätzungen:*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

(Die linke Ungleichung heißt a posteriori und die rechte – a priori Abschätzungen)

Newton-Verfahren

Motivation:

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrungsfunktion ϕ ab.
Eine geschickte Wahl von ϕ führt auf das Newton-Verfahren. Dieses beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert schnell, falls es konvergiert.

Verfahren:

Wir suchen eine Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Das Newton-Verfahren besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.

Bemerkung:

- Die Bedingungen des Satzes C.138 sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, sowie für die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.
- Die Bedingung $L < 1$ des Satzes C.138 ist wesentlich. Denn die Funktion

$$\phi(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}, \quad \text{für} \quad D = \{x \geq 0\}$$

ist zwar schwachkontrahierend ($|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y|$), es existiert hier aber keinen Fixpunkt.

Die Tangente an f im Punkt x_0 ist das Taylorpolynom 1-ter Ordnung

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist in x_1 mit $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$, also in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Als allgemeine Iterationsvorschrift haben wir dann:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Beispiel C.139

Wir wollen die Nullstelle von $f(x) = x + \mathbf{e}^x$ bestimmen und wählen den Startwert $x_0 = 0$ (es ist $f'(x) = 1 + \mathbf{e}^x$):

ν	x_ν	$f(x_\nu)$	$f'(x_\nu)$
0	0	1	2
1	-0.5	0.1065306	1.6065307
2	-0.5663110	0.0013045	1.5676155
3	-0.5671432	0.0000002	1.5671434
4	-0.5671433	0.000000028	

Also hat $f(x) = x + \mathbf{e}^x$ eine Nullstelle bei $x_4 = -0.5671433$. Man beachte die Genauigkeit $f(x_4) = 0.000000028$.

Satz C.140 (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:

(a) *Die Funktion f hat genau eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.*

(b) *Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

(c) *Ist $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C}|x_n - x_{n-1}|^2.$$

Bemerkung:

Das Verfahren konvergiert nicht immer, im allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 “hinreichend nahe” bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).
Einen wichtigen Fall, in dem Konvergenz auftritt, enthält der folgende Satz:

Bemerkung:

1. Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.
2. Die Fehlerabschätzung unter (c) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt. Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_{n+1} auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.