

Satz C.138 (Banachscher Fixpunktsatz)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\phi : D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung von D in sich (d.h. $\phi(D) \subseteq D$) mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von ϕ in D .
- (b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^* .
- (c) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

(Die linke Ungleichung heißt a posteriori und die rechte – a priori Abschätzungen)



Bemerkung:

- ▶ Die Bedingungen des Satzes C.138 sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, sowie für die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.
- ▶ Die Bedingung $L < 1$ des Satzes C.138 ist wesentlich. Denn die Funktion

$$\phi(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}, \quad \text{für } D = \{x \geq 0\}$$

ist zwar schwachkontrahierend ($|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y|$), es existiert hier aber keinen Fixpunkt.



Newton-Verfahren

Motivation:

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrungsfunktion ϕ ab.

Eine geschickte Wahl von ϕ führt auf das Newton-Verfahren. Dieses beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert schnell, falls es konvergiert.

Verfahren:

Wir suchen eine Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Das Newton-Verfahren besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.



Die Tangente an f im Punkt x_0 ist das Taylorpolynom 1-ter Ordnung

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Der Schnittpunkt mit der x -Achse ist in x_1 mit $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$, also in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Als allgemeine Iterationsvorschrift haben wir dann:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Beispiel C.139

Wir wollen die Nullstelle von $f(x) = x + e^x$ bestimmen und wählen den Startwert $x_0 = 0$ (es ist $f'(x) = 1 + e^x$):

| ν | x_ν | $f(x_\nu)$ | $f'(x_\nu)$ |
|-------|------------|-------------|-------------|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | -0.5 | 0.1065306 | 1.6065307 |
| 2 | -0.5663110 | 0.0013045 | 1.5676155 |
| 3 | -0.5671432 | 0.0000002 | 1.5671434 |
| 4 | -0.5671433 | 0.000000028 | |

Also hat $f(x) = x + e^x$ eine Nullstelle bei $x_4 = -0.5671433$. Man beachte die Genauigkeit $f(x_4) = 0.000000028$.



Bemerkung:

Das Verfahren konvergiert nicht immer, im allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 "hinreichend nahe" bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).

Einen wichtigen Fall, in dem Konvergenz auftritt, enthält der folgende Satz:



Satz C.140 (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:

- (a) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.
- (b) Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ .

- (c) Ist $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} |x_n - x_{n-1}|^2.$$



Bemerkung:

1. Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.
2. Die Fehlerabschätzung unter (c) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt. Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_{n+1} auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.

