

## Implizites Differenzieren

### Motivation:

Bisweilen sind Funktionen implizit gegeben, z.B. kann eine Funktion:

$$y : (-1, 1) \rightarrow (0, 2) \text{ mit } x \mapsto y(x)$$

durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  implizit gegeben sein.

Dies ist dann zu interpretieren als:

»Ist  $x \in (-1, 1)$ , so ist  $y(x) \in (0, 2)$  jene eindeutig existierende Zahl, für die  $x^2 + y(x)^2 = 1$  gilt.«

Explizit ausgedrückt ist das:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ für } x \in (-1, 1).$$

Diese explizite Beziehung ist aber manchmal nur schwierig oder gar nicht aus der impliziten Schreibweise herleitbar oder schwierig zu differenzieren, o.ä.

In einem solchen Fall ist der folgende Satz hilfreich:



### Satz C.141 (Implizites Differenzieren)

Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  offene beschränkte Intervalle und  $y : I \rightarrow J$  eine differenzierbare Funktion. Wenn  $h : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, so dass:

- (i)  $h$  stetig ist;
- (ii)  $h(x, y(x)) = 0$  für alle  $x \in I$ ;
- (iii) die partiellen Ableitungen von  $h$  nach  $x$  und  $y$  (bezeichnet mit  $h_x$  bzw.  $h_y$ ) existieren<sup>1</sup>;

und außerdem  $x_0 \in I$ , so dass  $h_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$ , dann gilt für die Ableitung von  $y$  an der Stelle  $x_0$  die Beziehung:

$$y'(x_0) = -\frac{h_x(x_0, y(x_0))}{h_y(x_0, y(x_0))}.$$

<sup>1</sup>Eine partielle Ableitung einer Funktion in zwei Variablen  $x$  und  $y$  nach  $x$  erhält man, indem man  $y$  als Konstante betrachtet und wie gewohnt ableitet. (Analog für die partielle Ableitung nach  $y$ .)



## Das bestimmte Integral

### Motivation:

Eine weitere zentrale Frage der Analysis ist die nach dem Inhalt der Fläche, die zwischen der  $x$ -Achse, dem Graphen einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (abgeschlossenes, beschränktes Intervall) und den vertikalen Begrenzungsgeraden  $x = a$  und  $x = b$  liegt.

### Definition C.142

Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

- (a) Unter einer *Zerlegung*  $\mathcal{Z}$  von  $[a, b]$  versteht man eine geordnete Menge von endlich vielen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .
- (b) Man nennt  $\eta(\mathcal{Z}) := \max\{x_\nu - x_{\nu-1} : 1 \leq \nu \leq n\}$  die *Spanne* (beziehungsweise *Feinheit*) von  $\mathcal{Z}$ .
- (c) Eine Zerlegung  $\mathcal{Z}_1$  ist eine feinere Zerlegung als (bzw. Verfeinerung von)  $\mathcal{Z}_2$  ( $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1$ ), falls  $\mathcal{Z}_1$  durch Hinzunahme weiterer Knoten zu  $\mathcal{Z}_2$  entsteht.



### Definition C.143 (Riemann-Summe)

- (a) Summen der Form

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \text{ mit } \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

heißen *Riemann-Summen* einer Funktion  $f$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .

- (b)

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n \left( \inf_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \right) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Untersumme* von  $f$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .

- (c)

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n \left( \sup_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \right) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Obersumme* von  $f$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$ .



**Bemerkung:**

1. Für fixierte Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  ist  $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$ .
2. Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:  
 $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1 \implies U_f(\mathcal{Z}_1) \geq U_f(\mathcal{Z}_2)$  und  $O_f(\mathcal{Z}_1) \leq O_f(\mathcal{Z}_2)$ .
3. Für beliebige Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  und  $\mathcal{Z}'$  eines Intervalls ist stets  $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$ ; insbesondere ist die Menge der Obersummen (Untersummen) nach unten (oben) beschränkt.

**Beispiel C.145**

1. Sei  $f(x) = c = \text{const}$  auf  $[a, b]$ .  
 Dann ist

$$U_f(\mathcal{Z}) = O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n c(x_\nu - x_{\nu-1}) = c(b - a)$$

für jede Zerlegung  $\mathcal{Z}$ , d.h.

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

2. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Dirichletsche Sprungfunktion.}$$

Für jede Zerlegung  $\mathcal{Z}$  ist  $U_f(\mathcal{Z}) = 0$  und  $O_f(\mathcal{Z}) = 1$ .  
 Somit ist  $f(x)$  nicht Riemann-integrierbar.

**Definition C.144 (Riemann-Integral)**

- Wegen der letzten Eigenschaft existieren die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} U_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Unterintegral}$$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} O_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Oberintegral}$$

- $f(x)$  heißt (Riemann-)integrierbar über  $[a, b]$ , wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen.  
 Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

das Riemann-Integral von  $f(x)$  über  $[a, b]$ .

**Definition C.146 (Flächenberechnung)**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative, Riemann-integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx$$

als Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der  $x$ -Achse zwischen den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  bezeichnet.

**Bemerkung:**

1. Ist  $f$  negativ, so kann man die Fläche durch  $\int_a^b |f(x)| dx$  definieren.
2. Ist  $b < a$ , so definiert man  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .