Implizites Differenzieren

Motivation:

Bisweilen sind Funktionen implizit gegeben, z.B. kann eine Funktion:

$$y : (-1, 1) \to (0, 2) \text{ mit } x \mapsto y(x)$$

durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ implizit gegeben sein.
Dies ist dann zu interpretieren als:
»Ist $x \in (-1, 1)$, so ist $y(x) \in (0, 2)$ jene eindeutig existierende Zahl, für die $x^2 + y(x)^2 = 1$ gilt.«
Explizit ausgedrückt ist das:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ für } x \in (-1, 1).$$

Diese explizite Beziehung ist aber manchmal nur schwierig oder gar nicht aus der impliziten Schreibweise herleitbar oder schwierig zu differenzieren, o.ä.
In einem solchen Fall ist der folgende Satz hilfreich:

Satz C.141 (Implizites Differenzieren)

Seien I, $J \subset \mathbb{R}$ offene beschränkte Intervalle und $y : I \to J$ eine differenzierbare Funktion. Wenn $h : I \times J \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, so dass:

(i) *h stetig ist;*
(ii) *$h(x, y(x)) = 0$ für alle $x \in I$;*
(iii) *die partiellen Ableitungen von h nach x und y (bezeichnet mit h_x bzw. h_y) existieren[1];*

und außerdem $x_0 \in I$, so dass $h_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann gilt für die Ableitung von y an der Stelle x_0 die Beziehung:

$$y'(x_0) = -\frac{h_x(x_0, y(x_0))}{h_y(x_0, y(x_0))}.$$

[1] Eine partielle Ableitung einer Funktion in zwei Variablen x und y nach x erhält man, indem man y als Konstante betrachtet und wie gewohnt ableitet. (Analog für die partielle Ableitung nach y.)

Das bestimmte Integral

Motivation:

Eine weitere zentrale Frage der Analysis ist die nach dem Inhalt der Fläche, die zwischen der x-Achse, dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (abgeschlossenes, beschränktes Intervall) und den vertikalen Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ liegt.

Definition C.142

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Unter einer *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ versteht man eine geordnete Menge von endlich vielen Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
(b) Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max\{x_\nu - x_{\nu-1} : 1 \le \nu \le n\}$ die *Spanne* (beziehungsweise *Feinheit*) von $\mathcal{Z}$.
(c) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}_1$ ist eine feinere Zerlegung als (bzw. Verfeinerung von) $\mathcal{Z}_2$ ($\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1$), falls $\mathcal{Z}_1$ durch Hinzunahme weiterer Knoten zu $\mathcal{Z}_2$ entsteht.

Definition C.143 (Riemann-Summe)

(a) Summen der Form

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \text{ mit } \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

heißen *Riemann-Summen* einer Funktion f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

(b)

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\inf_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \Big) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Untersumme* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

(c)

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\sup_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \Big) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Obersumme* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Bemerkung:

1. Für fixierte Zerlegungen $\mathcal{Z}$ ist $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.
2. Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:
   $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1 \quad \Longrightarrow \quad U_f(\mathcal{Z}_1) \geq U_f(\mathcal{Z}_2)$ und $O_f(\mathcal{Z}_1) \leq O_f(\mathcal{Z}_2)$.
3. Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ eines Intervalls ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$; insbesondere ist die Menge der Obersummen (Untersummen) nach unten (oben) beschränkt.

Definition C.144 (Riemann-Integral)

- Wegen der letzten Eigenschaft existieren die Grenzwerte

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx := \sup_{\mathcal{Z}\,\text{Zerlegung von}[a,b]} U_f(\mathcal{Z}) \qquad \text{Riemannsches Unterintegral}$$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx := \inf_{\mathcal{Z}\,\text{Zerlegung von}[a,b]} O_f(\mathcal{Z}) \qquad \text{Riemannsches Oberintegral}$$

- f(x) heißt *(Riemann-)integrierbar* über [a, b], wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen.
  Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

das Riemann-Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.

Beispiel C.145

1. Sei $f(x) = c = const$ auf $[a, b]$.
   Dann ist

$$U_f(\mathcal{Z}) = O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} c(x_\nu - x_{\nu-1}) = c(b-a)$$

für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

2. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \textit{Dirichletsche Sprungfunktion.}$$

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist $U_f(\mathcal{Z}) = 0$ und $O_f(\mathcal{Z}) = 1$.
Somit ist $f(x)$ nicht Riemann-integrierbar.

Definition C.146 (Flächenberechnung)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, Riemann-integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als *Fläche* zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$ bezeichnet.

Bemerkung:

1. Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)| dx$ definieren.
2. Ist $b < a$, so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.