Satz C.147 (Monotonie des Riemann-Integrals)

Sind f und g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktione mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Bemerkung:

Als Folgerungen aus der Monotonie erhalten wir:

1. $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$
2. Wenn $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Satz C.148 (Rechenregeln für das Riemann-Integral)

Es seien f, g Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

1. *$f + g$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und*

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. *αf ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

3. *Gilt $a \leq c \leq b$, so ist f Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$, und es ist*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Satz C.149 (Riemannsches Kriterium)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist integrierbar über $[a, b]$.*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ derart, dass gilt:*

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Satz C.150 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ monoton ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Satz C.151 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ stetig ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Satz C.152

Sei f integrierbar auf $[a, b]$, $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ und $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $h \circ f$ integrierbar auf $[a, b]$.

Bemerkung:

Der Beweis ist kompliziert. Es genügt nicht, daß h integrierbar auf $[c, d]$ ist. Wir betrachten etwa die auf $[0, 1]$ integrierbaren Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0, 1],\ \frac{p}{q} \text{ gekürzt.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Aber die Verkettung ist nicht Riemann-integrierbar

$$(h \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

Aus Satz C.152 folgt

Satz C.153

Es seien f, g integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist

$$f \cdot g \text{ integrierbar auf } [a, b].$$

Satz C.154 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Mit $g \equiv 1$ folgt

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi) \quad \text{mit } a \leq \xi \leq b.$$

Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion

Definition C.155

Man nennt eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion F eine *Stammfunktion* von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstante C eine Stammfunktion von $f(x)$.

Satz C.156

Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F(x) = G(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) für alle $x \in I$.

Satz C.157

Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \qquad (a \leq x \leq b).$$

stetig auf $[a, b]$.
Ist f zusätzlich in $x_0 \in [a, b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar mit

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist F Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

Satz C.158 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

Bemerkung:

Integrierbarkeit erweist sich in gewisser Weise als Umkehrung der Differentiation:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \Longrightarrow \quad \left(\int f\right)' = f$$

und

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}, F' \in R([a, b]) \quad \Longrightarrow \quad \int F' = F.$$