

Definition C.159 (Unbestimmtes Integral)

Eine Stammfunktion F von f wird auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet und man schreibt

$$F = \int f \quad \text{oder} \quad F(x) = \int f(x) dx.$$

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt! (Vergleiche Satz C.156.)

Bemerkung:

Nicht jede integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion und die Existenz einer Stammfunktion F von f sichert nicht die Integrierbarkeit von f .

Bemerkung zur Substitutionsregel:

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, diesen Satz anzuwenden:

- 1.) Der Integrand ist von der Form $f(g(t))g'(t)$ oder läßt sich auf diese Form bringen. Zum Beispiel ist

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -f(g(t))g'(t)$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(t) = \cos t$, $g'(t) = -\sin t$.

- 2.) Zur Berechnung von $\int f(x) dx$ substituieren wir $x = g(t)$ mit einer geeigneten, umkehrbaren Funktion $g(t)$; dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, $dx = g'(t) dt$ und es entsteht das Integral

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = H(t) + c,$$

wobei H eine Stammfunktion von $h := f \circ g$ ist.

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale. Hierzu gibt es zwei Grundtechniken:

Satz C.160 (Substitutionsregel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow D$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Satz C.161 (Partielle Integration)

Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Bemerkung zur Substitutionsregel (Forts.):

Rücksubstitution $t = g^{-1}(x)$ liefert

$$\int f(x) dx = H(g^{-1}(x)) + c.$$

Beispielsweise zur Berechnung von $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ für $0 < a < 1$ substituieren wir $x := g(t) = \sin t$ (dann ist $t = \arcsin x = g^{-1}(x)$), $dx = \cos t dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^a f(x) dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(a)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \\ &= \int_0^{\arcsin a} \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt \end{aligned}$$

(wegen $0 \leq x < a < 1$ ist $0 \leq t = \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos t \geq 0$ und somit)

$$= \int_0^{\arcsin a} 1 dt = \arcsin a.$$

Uneigentliche Integrale

Motivation:

Es treten häufig Integrale auf, bei denen

- ▶ der Integrand nicht beschränkt ist.

Beispiel: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

- ▶ das Integrationsintervall kein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

Beispiel: $\int_a^\infty f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$

Solche Integrale werden *uneigentlich* genannt.

Definition C.163 (Konvergenz)

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \epsilon, b]$ mit $0 < \epsilon < b - a$ integrierbar und in a nicht definiert.

Falls $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x) dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Eine analoge Definition gilt, falls $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in b nicht definiert, aber auf inneren Approximationen integrierbar ist:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

Schließlich setzt man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ für } f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition C.162 (Uneigentliche Integrationsgrenzen)

Es sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Man setzt

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

Man nennt dann das Integral *konvergent* und f auf $[a, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*.

Analog erklärt man Integrale $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ für $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Schließlich setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \text{ für } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Interpolation von $n!$

Definition C.164

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Satz C.165

1. Es gilt die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.