Definition C.159 (Unbestimmtes Integral)

Eine Stammfunktion F von f wird auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet und man schreibt

$$F = \int f \qquad \text{oder} \qquad F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt! (Vergleiche Satz C.156.)

Bemerkung:

Nicht jede integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion und die Existenz einer Stammfunktion F von f sichert nicht die Integrierbarkeit von f.

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale. Hierzu gibt es zwei Grundtechniken:

Satz C.160 (Substitutionsregel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a,b] \to D$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Satz C.161 (Partielle Integration)

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Bemerkung zur Substitutionsregel:

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, diesen Satz anzuwenden:

1.) Der Integrand ist von der Form $f\big(g(t)\big)\,g'(t)$ oder läßt sich auf diese Form bringen. Zum Beispiel ist

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -f\big(g(t)\big)\,g'(t)$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}, g(t) = \cos t, g'(t) = -\sin t$.

2.) Zur Berechnung von $\int f(x)\,dx$ substituieren wir $x = g(t)$ mit einer geeigneten, umkehrbaren Funktion $g(t)$; dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, $dx = g'(t)\,dt$ und es entsteht das Integral

$$\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt = H(t) + c,$$

wobei H eine Stammfunktion von $h := f \circ g$ ist.

Bemerkung zur Substitutionsregel (Forts.):

Rücksubstitution $t = g^{-1}(x)$ liefert

$$\int f(x)\,dx = H\big(g^{-1}(x)\big) + c.$$

Beispielsweise zur Berechnung von $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ für $0 < a < 1$ substituieren wir $x := g(t) = \sin t$ (dann ist $t = \arcsin x = g^{-1}(x)$), $dx = \cos t\,dt$ und erhalten

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(a)} f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\arcsin a} \frac{1}{|\cos t|} \cos t\,dt$$

(wegen $0 \le x < a < 1$ ist $0 \le t = \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos t \ge 0$ und somit)

$$= \int_0^{\arcsin a} 1\,dt = \arcsin a.$$

Uneigentliche Integrale

Motivation:

Es treten häufig Integrale auf, bei denen

- der Integrand nicht beschränkt ist.

  Beispiel: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

- das Integrationsintervall kein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

  Beispiel: $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx, \int\limits_{-\infty}^a f(x)\, dx, \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$

Solche Integrale werden *uneigentlich* genannt.

Definition C.162 (Uneigentliche Integrationsgrenzen)

Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.
Man nennt dann das Integral *konvergent* und f auf $[a, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*.
Analog erklärt man Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ für $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$.
Schließlich setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx := \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx \text{ für } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Definition C.163 (Konvergenz)

Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \epsilon, b]$ mit $0 < \epsilon < b - a$ integrierbar und in a nicht definiert.
Falls $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x)\, dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx.$$

Eine analoge Definition gilt, falls $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ in b nicht definiert, aber auf inneren Approximationen integrierbar ist:

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx.$$

Schließlich setzt man

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^a f(x)\, dx \text{ für } f : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Interpolation von $n!$

Definition C.164

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

Satz C.165

1. *Es gilt die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion*

   $$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^+).$$

2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(n + 1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}_0$.