

Bogenlänge

Satz C.166

Der Graph $y = f(x)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Beispiel C.167

Kreisbogen $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Es gilt $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ und somit $(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Damit gilt für den Kreisbogen

$$\ell = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a.$$

Beispiel C.169

1. Die Parameterdarstellung $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ beschreibt einen Kreis mit Radius r .
2. Die Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ beschreibt eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Satz C.170

Die Länge eines Kurvenbogens mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $a \leq t \leq b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Definition C.168

Eine ebene Kurve (Kurve in \mathbb{R}^2) wird beschrieben durch zwei stetige (differenzierbare) Funktionen $x(t)$, $y(t)$ ($a \leq t \leq b$). Der Punkt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b$$

verändert sich stetig mit t (Zeit) und durchläuft eine Kurve. Man nennt das System der beiden Gleichungen

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

eine Parameterdarstellung der Kurve, t den Parameter und $[a, b]$ das Parameterintervall. Die Kurve wird mit wachsendem t in positiver Richtung durchlaufen.

Beispiel C.171

Für den Kreisumfang gilt

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Bemerkung:

Man kann eine Kurve auch beschreiben durch einen Zeiger, der um den Nullpunkt gedreht wird und dessen Länge r sich mit dem Winkel φ verändert:

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

heißt dann die Polardarstellung der Kurve. Für die Länge erhält man

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Beispiel C.172

1. Für den Kreis (konstanter Radius) gilt $r(\varphi) = r$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und damit

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} d\varphi = 2\pi r.$$

2. Es ist $r(\varphi) = a\varphi$ für $a > 0$ und $0 \leq \varphi \leq \infty$ die Polardarstellung einer Spirale. Nach einem Umlauf ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) beträgt die Länge

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left(\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} \Big|_0^{2\pi} + \operatorname{arsinh} \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{a}{2} (2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \operatorname{arsinh} 2\pi) \end{aligned}$$

Definition C.173 (Orientierter Flächeninhalt)

Der Fahrstrahl an der Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(c)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ mit $\eta(\mathcal{Z}) \leq \delta$ gilt:

$$|A(\mathcal{Z}) - F(c)| \leq \epsilon.$$

Satz C.174 (Sektorformel von Leibnitz)

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Ortsvektor $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ im Zeitintervall $[a, b]$ die Fläche

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) dt.$$

Sektorflächen

Wir wollen den Flächeninhalt berechnen, den ein Fahrstrahl von 0 nach $c(t)$ für eine Funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht.

Dazu approximieren wir die Fläche durch Dreiecksflächen:

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

Die Fläche des durch die Eckpunkte

$0, c(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, c(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ festgelegten Dreiecks beträgt

$$\frac{1}{2} |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|,$$

womit die Gesamtfläche aller durch die Zerlegung entstandenen Dreiecke

$$A(\mathcal{Z}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

ist (geeignete Orientierung vorausgesetzt, damit die Beträge entfallen können).

Beispiel C.175

Der Fahrstrahl an den orientierten Kreisbogen

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \quad t \in [0, \varphi] \end{aligned}$$

überstreicht die orientierte Fläche

$$\frac{1}{2} \int_0^\varphi (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r \cos t \cdot r \cos t + r \sin t \cdot r \sin t dt = \frac{r^2}{2} \varphi.$$

Für $\varphi = 2\pi$ ergibt sich πr^2 (die Kreisfläche).