Bogenlänge

Satz C.166

Der Graph $y = f(x)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Beispiel C.167

Kreisbogen $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{Es gilt} \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{und somit} \qquad (y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Damit gilt für den Kreisbogen

$$\ell = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a.$$

Definition C.168

Eine *ebene Kurve* (Kurve in $\mathbb{R}^2$) wird beschrieben durch zwei stetige (differenzierbare) Funktionen $x(t)$, $y(t)$ ($a \le t \le b$). Der Punkt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad a \le t \le b$$

verändert sich stetig mit t (Zeit) und durchläuft eine Kurve. Man nennt das System der beiden Gleichungen

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

eine *Parameterdarstellung* der Kurve, t den *Parameter* und $[a, b]$ das *Parameterintervall*. Die Kurve wird mit wachsendem t in positiver Richtung durchlaufen.

Beispiel C.169

1. Die Parameterdarstellung $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ für $0 \le t \le 2\pi$ beschreibt einen Kreis mit Radius r.
2. Die Parameterdarstellung $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ für $0 \le t \le 2\pi$ beschreibt eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Satz C.170

Die Länge eines Kurvenbogens mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $a \le t \le b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Beispiel C.171

Für den Kreisumfang gilt

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Bemerkung:

Man kann eine Kurve auch beschreiben durch einen Zeiger, der um den Nullpunkt gedreht wird und dessen Länge r sich mit dem Winkel φ verändert:

$$r = r(\varphi) \qquad (\alpha \le \varphi \le \beta)$$

heißt dann die *Polardarstellung* der Kurve. Für die Länge erhält man

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Beispiel C.172

1. Für den Kreis (konstanter Radius) gilt $r(\varphi) = r$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und damit
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, d\varphi = 2\pi r.$$
2. Es ist $r(\varphi) = a\varphi$ für $a > 0$ und $0 \leq \varphi \leq \infty$ die Polardarstellung einer Spirale Nach einem Umlauf ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) beträgt die Länge
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2}\, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi} + arsinh\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) \\ &= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + arsinh 2\pi\right) \end{aligned}$$

Sektorflächen

Wir wollen den Flächeninhalt berechnen, den ein Fahrstrahl von 0 nach $c(t)$ für eine Funktion $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ überstreicht.
Dazu approximieren wir die Fläche durch Dreiecksflächen:
Sei $\mathcal{Z} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
Die Fläche des durch die Eckpunkte
$0, c(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, c(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ festgelegten Dreiecks beträgt
$$\frac{1}{2}|x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|,$$
womit die Gesamtfläche aller durch die Zerlegung entstandenen Dreiecke
$$A(\mathcal{Z}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$
ist (geeignete Orientierung vorausgesetzt, damit die Beträge entfallen können).

Definition C.173 (Orientierter Flächeninhalt)

Der Fahrstrahl an der Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(c)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ mit $\eta(\mathcal{Z}) \leq \delta$ gilt:
$$|A(\mathcal{Z}) - F(c)| \leq \epsilon.$$

Satz C.174 (Sektorformel von Leibniz)

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Ortsvektor $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ im Zeitintervall $[a, b]$ die Fläche
$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)dt.$$

Beispiel C.175

Der Fahrstrahl an den orientierten Kreisbogen
$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \qquad t \in [0, \varphi] \end{aligned}$$
überstreicht die orientierte Fläche
$$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r\cos t \cdot r\cos t + r\sin t \cdot r\sin t\, dt = \frac{r^2}{2}\varphi.$$
Für $\varphi = 2\pi$ ergibt sich πr^2 (die Kreisfläche).