

Mehrfachintegrale

Motivation

Funktionen können von mehreren Variablen abhängen, wie zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Lassen sich für solche Funktionen Begriffe wie das Integral sinnvoll definieren?

Wir beschränken uns hier auf Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem rechteckigen Definitionsbereich $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Unser Ziel ist die Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von f .

Definition C.182 (Zerlegung)

(a) $\mathcal{Z} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ heißt *Zerlegung* von $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1 \\ a_2 &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2 \end{aligned}$$

(b) Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max_{i,j} \{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\}$ die *Feinheit* von \mathcal{Z} .

Definition C.183

Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung.

(a) Die Mengen $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ heißen Teilquader der Zerlegung und $|Q_{ij}| := |x_i - x_{i+1}| \cdot |y_j - y_{j+1}|$ bezeichne den Flächeninhalt von Q_{ij} .

(b) Summen der Form

$$\begin{aligned} U_f(\mathcal{Z}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}| \\ O_f(\mathcal{Z}) &= \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}| \end{aligned}$$

heißten *Riemannsche Unter- bzw. Obersumme* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} . Für beliebige Punkte $(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \in Q_{ij}$ heißt

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \cdot |Q_{ij}|$$

eine *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} .

Bemerkung:

Analog zu den entsprechenden Aussagen für eindimensionale Riemannintegrale gilt:

- $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.
- Die Hinzunahme weiterer Zerlegungspunkte x_i oder y_j vergrößert Untersummen und verkleinert Obersummen.
- Für beliebige Zerlegungen \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$;

Definition C.184

Existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x,y) dx dy &:= \sup_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } D} \{U_f(\mathcal{Z})\} \\ \int \int_D^- f(x,y) dx dy &:= \inf_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } D} \{O_f(\mathcal{Z})\} \end{aligned}$$

so heißen sie *Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral*.

Definition C.185

Eine Funktion $f(x, y)$ heißt *(Riemann)integrierbar* über D , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen.

$$\int \int_D f(x,y) dx dy := \int \int_D^- f(x,y) dx dy = \int \int_D^+ f(x,y) dx dy$$

heißt dann das *(Riemann-)Integral* von $f(x, y)$ über D .

Satz C.186 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals)

Seien f und g integrierbare Funktionen. Es gelten folgende Aussagen:

(a) **Linearität**

$$\int \int_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \int \int_D f dx dy + \beta \int \int_D g dx dy.$$

Satz C.187 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals (Forts.))

(b) **Monotonie** Gilt $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$, so folgt

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D g(x, y) dx dy.$$

(c) **Nichtnegativität** Wenn $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$, dann gilt

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

(d) **Zusammensetzung von Integrationsbereichen** Sind D_1, D_2, D Rechtecke mit $D = D_1 \cup D_2$ und $|D_1 \cap D_2| = 0$, so ist $f(x, y)$ genau dann über D integrierbar, wenn $f(x, y)$ über D_1 und D_2 integrierbar ist. Es gilt dann:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy.$$



Bemerkung

Der Satz von Fubini ermöglicht die Berechnung von Doppelintegralen auf die Integration von Funktionen einer Variablen zurückzuführen.

Verallgemeinerung

Mit $g(x) \geq c$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ so gilt für das Gebiet

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], c \leq g(x)\}$$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^{g(x)} f(x, y) dy$$

Bemerkung

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich direkt auf Mehrfachintegrale in drei oder mehr Variablen verallgemeinern.



Satz C.188 (Riemannsches Kriterium)

f ist genau dann über D integrierbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung \mathcal{Z} von D existiert, so dass:

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Satz C.189 (Satz von Fubini)

Sei $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Rechteck. Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist und die Integrale

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \text{ und } G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ sowie $y \in [a_2, b_2]$ existieren, so gilt:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} F(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} G(y) dy$$

