

C-2 Folgen und ihre Grenzwerte

Definition C.35 (Folge)

Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \in f(n) =: a_n$ heißt (reellwertige) Folge. Wir nennen a_n das n -te Glied der Folge und kürzen die Folge mit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_n\}$ oder einfach a_n ab.

Bemerkung:

Viele der nachfolgenden Resultate (aber nicht alle) lassen sich verallgemeinern auf Folgen mit anderen Wertebereichen, z.B. \mathbb{C}, \mathbb{R}^p .

Beispiel C.36

- (a) konstante Folge $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$
- (b) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
- (c) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3$. Sie ergibt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...



Definition C.37 ((streng) monoton fallend/wachsend)

Eine reellwertige Folge $\{a_n\}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $\{a_n\}$ *streng monoton wachsend*. Analog definiert man (*streng*) *monoton fallend*.

Definition C.38 (beschränkt)

$\{a_n\}$ heißt *nach oben/unten beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben/unten beschränkt ist.

Bemerkung:

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ werden als *Supremum/Infimum* von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.



Definition C.39 (ε -Umgebung)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von a .

Definition C.40 (konvergente Folge)

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt *konvergent* gegen a , wenn in jeder ε -Umgebung von a "fast alle" Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |x - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ und nennt a den *Grenzwert (Limes)* von $\{a_n\}$.

Eine reellwertige Folge heißt *divergent*, wenn es keinen solchen Grenzwert gibt.



Definition C.41

Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen *Nullfolgen*.

Beispiel C.42

- (a) Die konstante Folge ist konvergent:

$$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein

$$n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \text{Wegen} \quad 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{ist also}$$

$$\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0), \quad \forall n \geq n_0$$

- (c) Die Folge $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.



Definition C.43 (uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz)

Sei $\{a_n\}$ eine Folge. Dann *strebt a_n gegen ∞* , ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > r, \forall n \geq n_0$. In diesem Fall spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz* oder *bestimmter Divergenz*.

Analog definiert man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < r, \forall n \geq n_0$.

Beispiel C.44

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$



Satz C.45 (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Eine konvergente Folge ist beschränkt, d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

Satz C.46 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Satz C.47 (Konvergenzkriterien)

- (i) Vergleichskriterium: Seien $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Dann konvergiert $\{b_n\}$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.
- (ii) Cauchy-Kriterium: Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

- (iii) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert.



Beispiel C.48

$\{\frac{1}{n^2}\}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Also ist diese Folge nach C.47 (iii) konvergent.

Satz C.49 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

- (a) Falls $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.
- (b) Falls $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$ ($a < b$ ist i.A. falsch!).
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n \pm b_n\} = a \pm b$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b$ (d.h. insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} \{c \cdot a_n\} = c \cdot a$).
- (e) Ist $b \neq 0$, so existiert n_0 mit $b_n \neq 0, \forall n \geq n_0$. Dann sind auch $\{\frac{1}{b_n}\}_{n \geq n_0}, \{\frac{a_n}{b_n}\}_{n \geq n_0}$ konvergent und haben den Limes $\frac{1}{b}$ bzw. $\frac{a}{b}$.
- (f) $\{a_n\}$ konvergiert gegen $|a|$.
- (g) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$.



Beispiel C.50

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17}{n} = 17 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 17 \cdot 0 = 0$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 1$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{5}{7}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (wird in der Übung besprochen)

