Unendliche Reihen

Definition C.55

Gegeben sei eine Folge $\{a_\nu\}$, und es sei

$$s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

Dann heißt die Folge $\{s_n\}_{n\geq 0}$ eine *unendliche Reihe*, in Zeichen

$$\{s_n\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

und s_n ihre *n-te Partialsumme.*

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen konvergiert. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, so schreibt man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$$

Beispiel C.57

(a)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1.$$

(b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = e$$

Bemerkung:

Abänderung von endlich vielen Gliedern ändert nichts am Konvergenzverhalten (da ab einer Stelle die neuen Partialsummen sich von den alten nur um eine Konstante unterscheiden), im allgemeinen aber den Wert der Reihe.

Bemerkung:

1. Eine Reihe ist also nichts anderes als eine spezielle Folge, nämlich die Folge der Partialsummen.
2. Der Ausdruck $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ erlaubt zweierlei Interpretationen: erstens die Folge $\{s_n\} = \{\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\}$ der Partialsummen, zweitens, im Fall der Konvergenz, den Wert der Reihe ($= \lim\limits_{n\to\infty} \{s_n\}$).

Beispiel C.56 (Geometrische Reihe)

Sei $a_\nu = q^\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots$; dann ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$

Für $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q}$$

Satz C.58

Die "harmonische Reihe" $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ist divergent.

Satz C.59

1. *Sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent, so sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_\nu)$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(ca_\nu)$ mit $c \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(ca_\nu) = c\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu.$$

2. *Das Monotoniekriterium (Satz C.47 (iii)) und das Cauchy-Kriterium (SatzC.47 (ii)) gelten auch für Reihen.*

Bemerkung:

1. Aus dem Monotoniekriterium folgt: Sind die Glieder einer Folge $\{a_\nu\}$ positiv und ist die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen beschränkt, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$; denn $\{s_n\}$ wächst streng monoton und $\lim\{s_n\}$ existiert.

Beispiel C.60

Für $\alpha > 1$ konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$.

2. Das Cauchy-Kriterium sagt aus: Äquivalent zur Konvergenz ist

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ gilt } \left| s_{n+k} - s_n \right| < \varepsilon,$$

das heißt

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} a_\nu \right| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Umgangssprachlich: Schlußstücke (Reste) konvergenter Reihen werden beliebig klein!

Bemerkung:

Speziell folgt aus dem Cauchy-Kriterium: Ist $\sum a_\nu$ konvergent, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt } \left| s_{n+1} - s_n \right| < \varepsilon.$$

Wegen $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ folgt: $\{a_n\}$ muss gegen Null konvergieren.

Satz C.61 (Notwendige Konvergenzbedingung)

Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergent, so ist* $\lim_{\nu\to\infty} \{a_\nu\} = 0$.

Bemerkung:

Gilt also $\lim\{a_\nu\} \neq 0$, so kann die Reihe nicht konvergieren. Die Umkehrung des Satzes ist falsch: $\sum \frac{1}{\nu}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{\nu} \to 0$ für $\nu \to \infty$ (vergleiche Satz C.58).

Definition C.62

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert.

Beispiel C.63

1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.
2. Für $|q| < 1$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ absolut konvergent. Die Werte sind aber im allgemeinen unterschiedlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

Satz C.64

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch, siehe Beispiel C.63(1).

Konvergenzkriterien

Satz C.65

1. *Es gilt das Majorantenkriterium: Ist* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \geq n_0$ *und konvergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$, *so konvergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut.*
2. *Es gilt das Minorantenkriterium: Ist* $a_n \geq b_n \geq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *und divergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$, *so divergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

Bemerkung:

Die Reihe $\sum b_\nu$ nennt man *konvergente Majorante* von $\sum a_\nu$ im Fall (a), *divergente Minorante* von $\sum a_\nu$ im Fall (b).

Beispiel C.66

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ ist konvergent, wegen $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ und Satz C.64.