

Satz C.67 (Quotientenkriterium von d'Alambert)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt das Quotientenkriterium:

- $\exists q < 1 \exists n_0 (n_0 \geq n_1)$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist absolut konvergent.
- $\exists n_0 (n_0 \geq n_1)$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist divergent.

Bemerkung:

Es genügt nicht $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$; es muß ein solches (festes) q existieren. Etwa ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1} < 1$ für $a_n = \frac{1}{n}$, aber $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Beispiel C.68

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz C.72 (Wurzelkriterium in Limes-Form)

Wenn der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q$ existiert, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$

- absolut konvergent für $q < 1$.
- divergent für $q > 1$.

Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, so ist keine Aussage möglich.

Beispiel C.73

$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2n+3}{3n+2})^n$ konvergiert absolut.

Definition C.74

Eine Reihe heißt *bedingt* konvergent, wenn sie konvergiert aber nicht absolut konvergiert.

Satz C.69 (Quotientenkriterium in Limes-Form)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ und existiere ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$. Dann gilt:

- Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe.

Satz C.70 (Wurzelkriterium von Cauchy)

Es gilt das Wurzelkriterium:

- $\exists q < 1 \exists n_0$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist absolut konvergent.
- Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent.

Beispiel C.71

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ konvergiert absolut.

Ein Kriterium für bedingte Konvergenz liefert

Satz C.75 (Leibniz-Kriterium)

Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fällt $\{a_n\}$ monoton gegen Null, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Beispiel C.76

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$)

sind konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Bemerkung:

Die Bedingung $\lim \{a_n\} = 0$ ist notwendig, vergleiche Satz C.61. Wichtig ist auch die Monotonie von $\{a_n\}$: Zum Beispiel mit der Folge $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots$ erhält man die (unbeschränkten) Partialsummen $1, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \dots$ der harmonischen Reihe.

Umordnung, unbedingte Konvergenz

Bei endlichen Summen ist die Reihenfolge der Summanden beliebig, nicht aber bei unendlichen Reihen:

Beispiel C.77

$$\begin{array}{r}
 s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\
 \frac{1}{2}s = \quad + \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} \quad - \frac{1}{8} + \dots \\
 \hline
 \frac{3}{2}s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} \quad + \dots
 \end{array}$$

Dabei stehen in der Summe dieselben Summanden wie in der Ausgangsreihe. Daher könnte man erwarten, daß die Grenzwerte s und $\frac{3s}{2}$ übereinstimmen, was aber wegen $s \neq 0$ ersichtlich nicht der Fall ist.

Definition C.78

Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung zum selben Wert konvergiert.



Satz C.79

Genau die absolut konvergenten Reihen sind unbedingt konvergent.

Beispiel C.80

Der Riemannsche Umordnungssatz besagt: Man kann bedingt konvergente Reihen zu jedem beliebigen Wert s umordnen. Wir betrachten

$\sum (-1)^{v-1} \frac{1}{v}$ und geben den Wert $s = 1.5$ vor:

$$s^{(1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} = 1.5\bar{3}$$

$$s^{(2)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30} = 1.0\bar{3}$$

$$s^{(3)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{137099}{90090} = 1.5218004$$

$$s^{(4)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = 1.27180042.$$

