Stetigkeit

Motivation:

In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn die Eingabegrößen nur gering variiert werden. Mathematisch kann man dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisieren.

Definition C.81 (Konvergenz gegen Grenzwert)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. $f(x)$ konvergiert für $x \to \xi$ gegen den Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \eta.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{x_n\to\xi} f(x_n) = \eta$.

Beispiel C.82

1. $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert.
2. Die Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ hat in 0 (also an der Sprungstelle) keinen Grenzwert.

Satz C.83 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Wenn für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ existieren, so gilt:

(a) $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$, *falls* $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0$

(d) $\lim\limits_{x\to\xi}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ *für beliebige* $c \in \mathbb{R}$

(e) $\lim\limits_{x\to\xi} |x| = |\xi|$

Definition C.84 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen, d.h. es ist:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\lim_{x\to\xi} x) = f(\xi).$$

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten stetig ist.

Satz C.85 (ϵ–δ–Kriterium der Stetigkeit)

Für eine Funktion f sind äquivalent:

(i) *f ist stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$.*

(ii) *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta(\epsilon) > 0$, so dass:*
$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.

Bemerkung:

1. Im Allgemeinen ist δ von ϵ und von ξ abhängig.
2. Anschaulich bedeutet das ϵ-δ-Kriterium, daß es unter den Funktionswerten in der Nähe einer Stetigkeitsstelle keine Ausreißer gibt; eine ganze δ-Umgebung von ξ wird unter f in einen ϵ-Streifen um $f(\xi)$ abgebildet.
   Hinreichend kleine Änderungen in den Argumenten einer stetigen Funktion führen also nur zu (beliebig) kleinen Änderungen der Funktionswerte.

Beispiel C.86

$f(x) = x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung

1. Satz C.83 besagt, dass für in ξ stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(\xi) \neq 0$) sowie $c \cdot f(x)$ stetig in ξ sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.
2. Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.
3. Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall liegen die betrachteten Folgen $\{x_n\}$ in D.

Beispiel C.87

1. Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.
2. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.
3. $\cosh x$ und $\sinh x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Satz C.88 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

(a) **Nullstellensatz:** *Ist $f(a) \cdot f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

(b) **Zwischenwertsatz:** *Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*

(c) **Stetigkeit der Umkehrfunktion:** *Ist f zusätzlich streng monoton wachsend auf $[a, b]$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.*

(d) **Maximum-Minimum-Eigenschaft:** *Es existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ und $f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.*

Beispiel C.89 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

1. Es sind $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ und $f(x) = \ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig.
2. Die Arcusfunktionen arcsin, arccos sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Gleichmäßige Stetigkeit

Nach dem ϵ-δ-Kriterium C.85 sind stetige Funktionen solche, deren Funktionswert sich bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments nur beliebig wenig ändert; allerdings hängt im Allgemeinen δ von ϵ und von ξ ab. In manchen Zusammenhängen ist es aber wichtig, dass δ nur von ϵ und nicht von ξ abhängt, d.h. das man in einem ganzen Intervall zu einem ϵ dasselbe $\delta(\epsilon)$ wählen kann.

Definition C.90 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Beispiel C.91

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist <u>nicht</u> gleichmäßig stetig auf $D = (0, \infty)$, aber stetig.

Satz C.92

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Bemerkung:

Der Definitionsbereich im obigen Beispiel ist <u>kein</u> abgeschlossenes Intervall.