Wichtige stetige Funktionen

Beispiel C.93 (Potenzfunktionen)

Potenzfunktionen besitzen die Struktur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ definiert man $x^0 = 1$. Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig.
Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \qquad x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \qquad (x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Beispiel C.94 (Wurzelfunktionen)

Schränkt man die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, so ist sie dort nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach Satz C.88 (c) existiert daher eine stetige streng monoton wachsende Umkehrfunktion: die n-te Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$.
Mit $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, $x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$ sowie $x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen.

Beispiel C.95 (Exponentialfunktion)

Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x$$

die Exponentialfunktion zur Basis a. Exponentialfunktionen sind stetig.
Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion bei der die Eulersche Zahl **e** als Basis dient. Man bezeichnet sie als

$$exp(x) := \mathbf{e}^x.$$

Beispiel C.96 (Logarithmusfunktion)

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

bezeichnet man als Logarithmusfunktion zur Basis a.
Für $a = e$ ergibt sich der natürliche Logarithmus ln.
Es gelten die Rechenregeln:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(x^p) = p \log_a x.$$

Beispiel C.97 (Trigonometrische Funktionen)

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit $\quad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi \quad$ bezeichnet.
Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin\varphi$ und die Cosinusfunktion $\cos\varphi$ definiert. Dabei misst man den Winkel φ im Bogenmaß: die Länge des entsprechenden Kreissegments im Einheitskreis.
Der Umfang des Einheitskreises beträgt $2 \cdot \pi$, wobei π die Kreiszahl $\pi \approx 3,14159\ldots$ ist.
Es gilt:

(a) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$
(b) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
(c) $\cos(-\varphi) = cos\varphi$
(d) $\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin\varphi$, $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos\varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (2π-Periodizität)
(e) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Beispiel C.98 (Trigonometrische Funktionen (Forts.))

Die Tangensfunktion tan ist definiert als $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.
Die Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ und es gilt π-Periodizität: $\tan(\varphi + k\pi) = \tan\varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel C.99 (Trigonometrische Umkehrfunktionen)

Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken auf dem sie streng monoton sind, so können wir dort Umkehrfunktionen definieren.

1. cos ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ heißt Arcus-Cosinus.
2. sin ist in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcus-Sinus.
3. tan ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

Definition C.100

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. f heißt *in ξ differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert und endlich ist.
Der Grenzwert heißt dann die *Ableitung bzw. Differentialquotient* von $f(x)$ in ξ und wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Den Übergang von f zu f' nennt man *Differenzieren* oder *Ableiten*.

Differenzierbarkeit

Motivation:

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, stellt sich die Frage: "Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?
  Wenn die Funktion z.B. den Ort eines Punktes in Abhängigkeit von der Zeit bei einer Bewegung entlang einer Linie beschreibt, so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion nur in unmittelbarer Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern.

Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung bzw. Differentiation.

Bemerkung:

(a) $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt *Differenzenquotient*. Dieser gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f an.
Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung in $(\xi, f(\xi))$ über.

(b) Die Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$ ist:

$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

(c) Wie bei der Stetigkeit übertrage sich die Begriffe singgemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq \mathbb{R}$.

Beispiel C.101

1. $f(x) = ax + b$ (Gerade mit Steigung a).
   Für $h \neq 0$ ist
   $$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \frac{(a(\xi+h)+b) - (a\xi + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$
   Daraus folgt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = a$; es ist also $f'(x) = a \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = x^{n-1} + \xi x^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}.$$
   Daraus folgt
   $$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \xi^{n-1} + \xi^{n-1} + \ldots + \xi^{n-1} = n \cdot \xi^{n-1}.$$
   Also ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Definition C.102

Die Funktion f heißt in $\xi \in D$ *linear approximierbar*, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\delta : U_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$f(\xi + \Delta x) = f(\xi) + c\Delta x + \delta(\Delta x) \text{ mit } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \qquad (1)$$

(m.a.W. $\delta(\Delta x) = o(\Delta x)$) gilt.

Satz C.103

f ist in ξ differenzierbar $\iff$ f ist in ξ linear approximierbar.

Satz C.104

Ist f in ξ differenzierbar, so ist f in ξ stetig.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch; vergleiche $f(x) = |x|$.
Differenzierbarkeit ist also mehr als Stetigkeit. Der Graph ist nicht nur in einem Zug zu zeichnen, er besitzt auch keine Ecken.

Ableitungen elementare Funktionen

(a) $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$: $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
(b) $f(x) = \mathbf{e}^x$: $f'(x) = \mathbf{e}^x$
(c) $f(x) = \ln x$ mit $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{x}$
(d) $f(x) = \sin x$: $f'(x) = \cos x$
(e) $f(x) = \cos x$: $f'(x) = -\sin x$
(f) $f(x) = \tan x$ mit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Satz C.105 (Ableitungsregeln)

f, g seien in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

a) *$f \pm g$ ist in ξ differenzierbar mit $(f \pm g)'(\xi) = f'(\xi) \pm g'(\xi)$;*
b) *$c \cdot f, \ c \in \mathbb{R}$, ist in ξ differenzierbar mit $(c \cdot f)'(\xi) = c \cdot f'(\xi)$;*
c) *$f \cdot g$ ist in ξ differenzierbar mit (Produktregel)*
   $$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi).$$
d) *Ist $g(\xi) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ ist in ξ differenzierbar mit (Quotientenregel)*
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

[Kurzfassung von (c) und (d): $(fg)' = f'g + fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.]

Satz C.106 (Kettenregel)

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ und $g : f(D) \to \mathbb{R}$ in $f(\xi) \in f(D)$ differenzierbar, so ist $h := g \circ f$ in ξ differenzierbar, und es gilt

$$h'(\xi) = (g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Bemerkung:

Für $h = g \circ f$ heißt g die äußere, f die innere Funktion.
h' = Ableitung der äußeren Funktion an der inneren Stelle mal Ableitung der inneren Funktion.
Kurzfassung: $h' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Satz C.107 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to f(I)$ eine umkehrbare stetige Funktion mit der Umkehrfunktion $\varphi := f^{-1} : f(I) \to I$.
Ist f in $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist φ in $\eta = f(\xi) \in f(I)$ differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(\eta) = \frac{1}{f'(\varphi(\eta))}.$$

Kurzform: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.