Sätze über differenzierbare Funktionen

Satz C.108 (Satz von Rolle)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz C.109 (Mittelwertsatz, Lagrange)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bemerkung:

Anschaulich heißt dies: In mindestens einem Punkt ξ ist die Tangente parallel zur Sekante von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$.
Im Weg-Zeit-Diagramm: Zu mindestens einem Zeitpunkt erreicht man genau die Durchschnittsgeschwindigkeit (Differenzierbarkeit vorausgesetzt).

Satz C.110 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz, Cauchy)

Es seien f, g auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Satz C.111 (Regel von de l'Hospital)

(a) *Es seien f, g auf (a,b) stetig differenzierbar mit $\xi \in (a,b)$, $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

(b) *Es seien f, g stetig differenzierbar auf $(a,b) \setminus \xi$, $\lim_{x\to\infty} f(\xi) = \lim_{x\to\infty} g(\xi) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

Beispiel C.112

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \left(„\frac{0}{0}“\right) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$
3. Das Verfahren funktioniert natürlich nur bei „unbestimmten Ausdrücken“ wie $\frac{0}{0}$:
Zum Beispiel ist $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0$, aber $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$.

Bemerkung:

Häufig ist vor der Anwendung der Regel von de l'Hospital eine Umformung erforderlich:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ bzw. } f(x) - g(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \Big).$$

Beispiel C.113

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \Big(\text{„}\frac{0}{0}\text{“} \Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} \\
&= \Big(\text{„}\frac{0}{0}\text{“} \Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} \cdot (-x^2) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(-2)\cdot(-x^2)}{x^2-1} = 2
\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Definition C.114

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, das heißt es existiert die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$.

- Ist f' auf I stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar.*
- Ist f' auf I differenzierbar, so nennt man f *zweimal differenzierbar* und $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f auf I.
- Entsprechend erklärt man n-malige Differenzierbarkeit und n-malige stetige Differenzierbarkeit für $n \in \mathbb{N}$.

Man schreibt $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Beispiel C.115

1. Für $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n. Es ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.
2. Für $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 4$. Also ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.
3. Für $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \dots$ Daher ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$.