Musterlösungen zu Serie 1

Aufgabe 1

a)

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ab + ad < ab + bc \Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow cd + ad < cd + bc \Rightarrow d(c+a) < c(d+b) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

b)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Stellen a, b wie folgt dar.

$$a = \pm a_+, b = \pm b_+, \text{ wobei } a_+, b_+ \in \mathbb{R}^+$$

Dabei steht das $\pm$ dafür, dass a, b sowohl positiv, als auch negativ sein können. Es gilt dann

$$|ab| = |(\pm a_+)(\pm b_+)| = |\pm a_+ b_+| = |a_+ b_+| \overset{(*)}{=} |a_+||b_+| = |\pm a_+||\pm b_+| = |a||b|$$

(*) Für positive reelle Zahlen ist diese Gleichheit klar, da das Produkt wiederum positiv ist.

c)

$|a+b| \leq |a| + |b|$ (Δ-Ungl.)

$$a = a + b - b \Rightarrow |a| = |a + b - b| \overset{(\Delta\text{-Ungl.})}{\leq} |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b| (*)$$

$$b = b + a - a \Rightarrow |b| = |b + a - a| \overset{(\Delta\text{-Ungl.})}{\leq} |b+a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a+b| (**)$$

Mit $(*)$ und $(**)$ folgt

$$||a| - |b|| \leq |a+b|$$

d)

$|x| < y \ \forall y \in \mathbb{R}^+$
Falls $x > 0$ muss die Beziehung insbesondere für $y = x$ gelten. Dann gilt jedoch $x = |x| < x$. Dies ist ein Widerspruch.
Falls $x < 0$ muss die Beziehung insbesondere für $y = -x$ gelten. Dann gilt jedoch $-x = |x| < -x$. Dies ist ein Widerspruch. Bleibt nur $x = 0$. Es gilt dann für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ $x < y$.

e)

Es gelte (Δ-Ungl.).

$$\text{z.z.} |\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang

$$n = 1 : \quad |a_1| \leq |a_1|$$

$$n = 2 : \quad |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \text{ nach } (\Delta\text{-Ungl.})$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es gelte } |\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Induktionsbehauptung:

$$|\sum_{i=1}^{n+1} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$$

Beweis.

$$|\sum_{i=1}^{n+1} a_i| = |\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}| \overset{(\Delta\text{-Ungl.})}{\leq} |\sum_{i=1}^{n} a_i| + |a_{n+1}| \overset{\text{Ind.Vor.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$$

Aufgabe 2

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Weiterhin seien

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \quad G(a,b) = \sqrt{ab} \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

a)

z.z.

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$$

$$H(a,b) \leq G(a,b) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Die letzte Aussage der Äquivalenzen ist wahr, also auch die erste.

$G(a,b) \leq A(a,b) \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$

Die letzte Aussage ist wahr, also auch die erste.

b)

Es gelte die Gleichheit aller drei Mittel. Dann gilt insbesondere

$$G(a,b) = A(a,b) \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \Rightarrow 4ab = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (a-b)^2 \Rightarrow 0 = a - b \Rightarrow a = b$$

Aufgabe 3

a)

z.z.

$$\inf\{-A\} = -\sup A$$

Sei $x = \inf\{-A\}$. Dann gilt

$$x \leq -a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \nexists y \in \mathbb{R}: \quad y > x \quad \text{und} \quad y \leq -a \quad \forall a \in A.$$

Daraus folgt nun

$$-x \geq a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \nexists y \in \mathbb{R}: \quad y < -x \quad \text{und} \quad y \geq a \quad \forall a \in A.$$

Denn würde so ein $y \in \mathbb{R}$ existieren, dann würde für $-y$ gelten:

$$-y > x \quad \text{und} \quad -y \leq -a \quad \forall a \in A.$$

Damit wäre aber x nicht das Infimum von $-A$ und das wäre ein Widerspruch.
Nun erfüllt aber $-x$ die Supremumseigenschaft und damit ist

$$-\inf\{-A\} = \sup\{A\} \qquad \text{also} \qquad \inf\{-A\} = -\sup A$$

b)

z.z.
$$\sup\{-A\} = -\inf\{A\}$$
Sei $x = \sup\{-A\}$. Dann gilt
$$x \geq -a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \nexists y \in \mathbb{R}: \quad y < x \quad \text{und} \quad y \geq -a \quad \forall a \in \ A.$$
Daraus folgt aber wiederum
$$-x \leq a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \nexists y \in \mathbb{R}: \quad y > -x \quad \text{und} \quad y \leq a \quad \forall a \in \ A.$$
Sonst würde man durch Betrachtung von $-y$ analog zu oben zu einem Widerspruch gelangen.
Nun erfüllt $-x$ die Eigenschaften des Infimums von A. Also gilt
$$-\sup\{-A\} = \inf\{A\} \qquad \text{also} \qquad \sup\{-A\} = -\inf\{A\}.$$

Aufgabe 4

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a)

Ist $ad - bc \neq 0$, so ist auch $cx + d \neq 0$ und es ist
$$y := \frac{ax+b}{cx+d} \text{ eine irrationale Zahl.}$$
Sei also $ad - bc \neq 0$, so gilt, falls $c = 0$, $d \neq 0$, also $cx + d \neq 0$. Sollte $c \neq 0$ sein, gilt ebenfalls $cx + d \neq 0$, denn sonst würde gelten $x = -\frac{c}{d}$, damit wäre x rational. Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist y wohldefiniert und es sei weiterhin
$$u := ax + b \qquad v := cx + d.$$
Damit erhält man folgende Beziehungen
$$u = vy, \qquad du - bv = (ad - bc)x, \qquad -cu + av = ad - bc.$$
Damit lässt sich x wie folgt ausdrücken
$$x = \frac{du - bv}{-cu + av} = \frac{dvy - bv}{-cvy + av} = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$
Nun sieht man, wäre y rational, so wäre auch x rational. Dies stünde im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist y irrational.

b)

Ist $ad - bc = 0$, so gilt entweder $cx + d = 0$ oder $y \in \mathbb{Q}$.
Sei also $ad - bc = 0$, weiterhin sei $cx + d \neq 0$, dann ist zu zeigen, dass y rational ist. Wäre $cx + d = 0$, dann wäre ja bereits die Behauptung wahr, daher genügt es diesen Fall zu betrachten. Für den Fall, dass $c \neq 0$ ist, gilt

$$b = \frac{ad}{c}, \qquad \text{und damit} \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a(x + \frac{d}{c})}{cx + d} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}.$$

Für den Fall, dass $c = 0$ folgt $d \neq 0$ und $a = 0$ und damit

$$y = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}.$$