Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 10

Aufgabe 1

a)

Berechnen zunächst für ein Intervall $[0, b]$ das Integral $\int_0^b x^2 dx$. Dazu zerlegen wir das Intervall $[0, b]$ äquidistant. Damit lautet die Integralsumme

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{b}{n} i)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Damit berechnet sich das Integral zu

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{b^3}{3}$$

Damit berechnet sich das eigentlich zu berechnende Integral zu

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^{-1} x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

b)

Die Integralsumme lautet in diesem Fall

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^{(\frac{i}{n})} \frac{1}{n} = \frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \frac{1}{n}$$

Das Integral berechnet sich dann zu

$$\int_0^1 a^x dx = (a-1) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} =$$

Führen wir ein neues Variabel ein $k = a^{\frac{1}{n}} - 1$, so erhalten wir mit $1/n = \log_a(k+1) = \frac{\ln(k+1)}{\ln a}$ den Limes:

$$= (a-1)\lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{k}\ln(k+1)}{\ln a} = \frac{(a-1)}{\ln a}\lim_{k\to 0}\ln(k+1)^{\frac{1}{k}} = \frac{a-1}{\ln a}\ln e = \frac{a-1}{\ln a}$$

c)

Die Integralsumme lautet in diesem Fall

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(\sqrt{x_i x_{i+1}})^2}\frac{b-a}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(a+\frac{(b-a)}{n}i)(a+\frac{(b-a)}{n}(i+1))}\frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{a+(\frac{b-a}{n})i} - \frac{1}{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Somit ist das Intgral gleich

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Aufgabe 2

Sei $\xi \in [a,b]$. Es ist zu zeigen, dass

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi \\ 1, & x = \xi \end{cases}$$

eine integrierbare Funktion ist. Dazu definieren wir folgende Funktion

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x-\xi| < \frac{\varepsilon}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses ϕ ist für jedes ε eine Treppenfunktion. Es gilt außerdem

$$0 \leq f \leq \phi \qquad \forall x \in [a,b]$$

Es gilt weiterhin $\forall\varepsilon > 0$

$$\int_a^b (\phi(x) - 0)dx = \int_{\xi-\varepsilon/4}^{\xi+\varepsilon/4} dx = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Damit ist f integrierbar.

Aufgabe 3

a)

Es gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.5\cos x}dx = f(\xi)2\pi \qquad \text{für}\xi \in [0,2\pi]$$

Damit folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0.5\cos x}dx = \frac{1}{1+0.5\cos\xi}2\pi \leq 2\pi\frac{1}{1+0.5(-1)} = 2\pi\frac{1}{0.5} = 4\pi$$

Analog kann man das Integral nach unten abschätzen indem man den Integranden betrachtet. Dieser wird minimal für $\cos\xi = 1$. Also gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0.5\cos x}dx = \frac{1}{1+0.5\cos\xi}2\pi \geq \frac{1}{1.5}2\pi = \frac{4}{3}\pi$$

b)

Es gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = f(\xi)2\pi \qquad \text{für} \xi \in [0, 2\pi]$$

Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{\xi^9}{\sqrt{1+\xi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Für diese Abschätzung untersucht man den Integranden auf seine Maxima hin. Für die Abschätzung des Integrals nach unten untersucht man den Integranden auf seine Minima hin. Man sieht, dass dieser im Intervall $[0,1]$ immer positiv oder 0 ist. Also ist sein Minimum bei Null. Daher folgt

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{\xi^9}{\sqrt{1+\xi}} \geq \frac{0^9}{\sqrt{1+0}} = 0.$$

Aufgabe 4

a)

$$f(x) = e^{x+1} + 2 - x - \pi$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$F(x) = e^{x+1} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \pi x$$

b)

$$f(x) = a^x e^x + 23\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt{x}}} = e^{x\ln a}e^x + 23\sqrt{x^3\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= e^{x\ln a + x} + 23\sqrt{x^{\frac{15}{4}}} = e^{x(\ln a+1)} + 23x^{\frac{15}{8}}$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$\frac{1}{\ln a+1}e^{x(\ln a+1)} + 23\frac{1}{1+\frac{15}{8}}x^{\frac{15}{8}+1} = \frac{1}{\ln a+1}a^x e^x + 8x^{\frac{23}{8}}$$

c)

Formen den Ausdruck zunächst um

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} - 2\cos^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} - 2\cos^2 x = 1 - \cos x - 2\cos^2 x$$

Nun ist die Stammfunktion einfacher zu bestimmen.

$$F(x) = x - \sin x - 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)) = x - \sin x - x - \frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$= -\sin x - \sin x \cos x$$