Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 11

Aufgabe 1

a)

Substituieren

$$u = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit berechnet sich das Integral wie folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2\sqrt{x}du}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2du}{(1+u^2)} = 2\arctan(u) + C = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

Das letzte Integral ist bekannt.

b)

Substituieren

$$u = \sqrt{x^2-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Damit folgt

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C = \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C$$

Aufgabe 2

a)

$$\int x^2 \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)x^2 + \int \frac{1}{2}\cos(2x)2xdx = -\frac{1}{2}\cos(2x)x^2 + \int \cos(2x)xdx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)x^2 + \frac{1}{2}\sin(2x)x - \int \frac{1}{2}\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)x^2 + \frac{1}{2}\sin(2x)x + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

b)

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = x \cdot \ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \sin x dx &= e^x \sin(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x)\\ &= 0 - (e^x \cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\sin(x)))\\ &= -(-e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin(x)) = 1 + e^\pi - \int_0^\pi e^x \sin(x))\\ \Rightarrow \qquad &\int_0^\pi e^x \sin(x)) = \frac{1}{2}(1+e^\pi)\end{aligned}$$

b)

$$\int_2^8 \frac{dt}{t^2+t} = \int_2^8 \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}dt = \ln t - \ln(t+1)\Big|_2^8 = \ln\frac{t}{1+t}\Big|_2^8 = \ln\frac{8}{9} - \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{4}{3}$$

Aufgabe 4

a)

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$$

b)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to -1} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b\to 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to -1} \arcsin x \Big|_a^0 + \lim_{b\to 1} \arcsin x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to -1} (0 - \arcsin a) + \lim_{b\to 1} (\arcsin b - 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Aufgabe 5

a)

Seien

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Es folgt dann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = 1$$

Nach dem Kriterium: aus der Konvergenz (schon bekannt) von

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx$$

folgt die Konvergenz des zu untersuchenden Integrals.

a)

$$\int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

An der Stelle $x = 1$ ist der Integrand eine unbeschränkte Funktion. Wir betrachten zuerst das erste Integral. Seien

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

Es folgt dann (mit L'Hospital)

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = -1$$

Nach dem Kriterium: aus der Divergenz (schon bekannt) von

$$\int_0^1 g(x)dx$$

folgt die Divergenz des zu untersuchenden Integrals. Das zweite Integral untersucht man analog.