Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 2

Aufgabe 1

a)

Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt auch $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$. Nun gilt, wegen der Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists N_a \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N_a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists N_b \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N_b$$

Dann gilt jedoch für alle $n > N := max(N_a, N_b)$

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{(*)}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

q.e.d.

Der Beweis für $a_n - b_n$ läuft analog, nur die letzte Zeile lautet dann

$$|a_n - b_n - (a - b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \overset{(*)}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

q.e.d.

Bei $(*)$ wird jeweils die Dreiecksungleichung angewandt.

b)

Da $\lim a_n = a$ ist, folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \quad \text{so dass} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N$$

Dann gilt auch $\big||a_n| - |a|\big| \overset{(*)}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon$. Das beweist die Behauptung. (Bei $(*)$ wurde die 2. Dreiecksungleichung angewandt)

Aufgabe 2

a)

Betrachten die Folge
$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^{10}.$$
Sie stellt ein Produkt dar, dessen Faktoren alle gegen den Wert 1 konvergieren.
$$(1 + \frac{1}{n})^{10} = \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\overset{n\to\infty}{\to} 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 + \frac{1}{n})}_{\overset{n\to\infty}{\to} 1} \overset{n\to\infty}{\to} 1$$
$$|((1 + \frac{1}{n})^{10}) - 1| = |\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (\frac{1}{n})^k - 1| = |\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} (\frac{1}{n})^k| \le |\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} (\frac{1}{n})| =$$
$$= \frac{1}{n} |\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k}| \le \frac{1}{n} |\binom{10}{5} \sum_{k=1}^{10} 1| \le \frac{1}{n} \binom{10}{5} \cdot 10 < \epsilon \Leftrightarrow N(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon} \binom{10}{5} \cdot 10$$

b)

Der Grenzwert dieser Folge ist 0. Betrachte den Betrag $|a_n - 0|$ und zeige, dass er gegen 0 konvergiert und damit kleiner als jedes ϵ wird.
$$|\frac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}} - 0| = |\frac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}}| = \frac{|\sin n + \cos^3 n|}{|\sqrt{n}|} \le \frac{|\sin n| + |\cos^3 n|}{\sqrt{n}} \le \frac{1+1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$|\frac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}} - 0| = |\frac{\sin n + \cos^3 n}{\sqrt{n}}| \le \frac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow N(\epsilon) > \frac{4}{\epsilon^2}$$

Aufgabe 3

a)

$$(1 + \frac{1}{3n})^n = \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{3n})^{3n}} = \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n'})^{n'}} \overset{n'\to\infty}{\to} \sqrt[3]{e}$$
Haben dabei $3n = n'$ substituiert, wobei für $n \to \infty$ auch $n' \to \infty$.

b)

Vorbemerkung: Verwenden hier die Bernoullische Ungleichung, die sich mittels vollst. Induktion beweisen lässt.

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \geq -1$$

Betrachten zunächst die Folge $\{(1-\frac{1}{n^2})^n\}$:

$$1 \geq (1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1-n\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n} \to 1$$

Also gilt

$$(1-\frac{1}{n^2})^n \to 1$$

Betrachten nun $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$:

$$(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\to e}} \to \frac{1}{e}$$

Betrachten nun die eigentliche Folge

$$(1-\frac{1}{n-2})^{n+5} = \underbrace{(1-\frac{1}{n-2})^{n-2}}_{\to\frac{1}{e}} \cdot \underbrace{(1-\frac{1}{n-2})^7}_{\to 1} \to \frac{1}{e}$$

Aufgabe 4

a)

$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{(-2)^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{1}{\underbrace{-2+3\underbrace{(\frac{3}{-2})^n}_{\to\pm\infty}}_{\to 0}} + \frac{1}{\underbrace{-2\,\underbrace{(\frac{-2}{3})^n}_{\to 0}+3}_{\to\frac{1}{3}}} \to \frac{1}{3}$$

b)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Aufgabe 5

Vorbemerkung: Verwende hier folgende Formel, die sich mittels vollst. Induktion beweisen lässt.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x \neq 1$$

Es ist

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Es ist zu zeigen, dass $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$. Sei oBdA $n \geq m$ und $n - m = l$ Betrachten dann

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=m}^{n} \frac{\sin k}{2^k} \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-(\frac{1}{2})^{m}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-(\frac{1}{2})^{n+1} - 1 + (\frac{1}{2})^m) =$$

$$= 2((\frac{1}{2})^m - (\frac{1}{2})^{n+1}) \leq 2(\frac{1}{2})^m$$

Dieser letzte Term, durch den man $|a_n - a_m|$ abschätzen kann, wird kleiner als jedes beliebige ϵ. Es genügt m genügend gross zu wählen. Damit findet sich für gegebenes $\epsilon > 0$ immer ein $N \in \mathbb{N}$, was die Anforderungen des Cauchy-Kriteriums erfüllt.

Aufgabe 6

Betrachten die Folge $\{a_n\}$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

Wir zeigen Monotonie und Beschränktheit, daraus folgt die Konvergenz der Folge.
Monotonie: Beweisen Monotonie mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:

$$a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 \leq 2 + \sqrt{2} \quad \text{o.k.}$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_{n-1} \leq a_n$. Zeigen die Behauptung:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}} \leq \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n+1 \text{ Wurzeln}} \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Wurzeln}} \leq 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1} \leq a_n \qquad \text{Dies gilt nach Induktionsvoraussetzung.}$$

Also ist $\{a_n\}$ monoton wachsend.

Beschränktheit:

Behauptung:

$$a_n \leq 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n\text{ Wurzeln}} \leq 2$$

Beweisen die rechte Seite der Äquivalenz wiederum mit vollst. Induktion.
Induktionsanfang:

$$\sqrt{2} \leq 2 \quad \text{o.k.}$$

Induktionsvoraussetzung: Aussage gelte für $n-1$. Zeigen die Behauptung:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n\text{ Wurzeln}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ Wurzeln}} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ Wurzeln}} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ Induktionsvoraussetzung} \qquad \text{o.k.}$$

Also ist die Folge beschränkt und monoton und somit auch konvergent. q.e.d.