Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 3

Aufgabe 1

a)

Können hier folgendermaßen zusammenfassen

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$$

Es handelt sich also um eine geometrische Reihe.
Diese konvergiert bekanntlich wie folgt.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$$

b)

Es gilt

$$S'_k=\sum_{n=1}^{k}(\frac{1}{2})^n=\frac{1-(\frac{1}{2})^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}-1\to\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1$$

Weiterhin gilt

$$S''_k=\sum_{n=1}^{k}(\frac{1}{3})^n=\frac{1-(\frac{1}{3})^{k+1}}{1-\frac{1}{3}}-1\to\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

Damit folgt

$$S_k=S'_k+S''_k\to 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, \text{ also } \quad \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n)=\frac{3}{2}$$

c)

Betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Dabei gilt

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{n+2} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) - (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$$

Können also für die Partialsummen schreiben

$$S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Die Folge der Partialsummen und damit die Reihe konvergiert gegen $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 2

a)

Betrachten die Reihe $\sum(-1)^n$. Diese Reihe kann nicht konvergieren, da die notwendige Bedingung a_n ist eine Nullfolge, nicht erfüllt ist, da a_n zwischen -1 und $+1$ oszilliert und damit divergiert.

b)

Betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$. Diese Reihe divergiert, da die Folge der Summanden $a_n = \sqrt[n]{0.001}$ gegen 1 konvergiert und damit keine Nullfolge ist.

c)

Betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Haben die Summanden nach oben durch Summanden der Form $\frac{1}{n^s}$ mit $s > 1$ abgeschätzt. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für solche s konvergiert, konvergiert auch diese Reihe (nach Majorantenkriterium).

d)

Untersuchen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}$.

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4k^2-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{4k^2}} = \frac{1}{2k}$$

Die Reihe lässt sich nach unten durch die harmonische Reihe mit Vorfaktor $\frac{1}{2}$ abschätzen, diese ist jedoch divergent. Nach Minorantenkriterium ist also auch die zu untersuchende Reihe divergent.

e)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}}$ divergiert. Denn es gilt für alle $n \geq 3$

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}.$$

Das bedeutet, ab dem dritten Summanden finden wir, dass die harmonische Reihe eine Minorante der zu untersuchenden Reihe bilden. Haben also eine divergierende Minorante gefunden. Die Reihe divergiert.

Aufgabe 3

a)

Verwenden Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}n!}{1000^n(n+1)!} = \frac{1000}{(n+1)} \to 0 < 1$$

Also ist die Reihe konvergent.

b)

Verwenden Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2(n+1))!} = \frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{n!n!(2n+2)!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{(2n+1)2} =$$

$$= \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4+\frac{2}{n}} + \frac{1}{4n+2} \to \frac{1}{4} < 1$$

Also konvergiert die Reihe

c)

Verwenden hier das Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}$$

Weiter kann man abschätzen

$$\frac{\sqrt[n]{1}}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$$

Es folgt also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$. Demnach konvergiert die Reihe.

d)

Nutzen hier das Quotientenkriterium.

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$$

Also konvergiert die Reihe.

e)

Zuerst schätzen wir die Summanden der Reihe ab, wie folgt.

$$a_n = \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n} \leq \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} := b_n$$

Für die Reihe $\sum b_n$ zeigen wir mittels des Wurzelkriteriums, dass sie konvergiert und mittels des Majorantenkriteriums folgt dann die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$.
Nutzen das Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \frac{n^{\frac{3}{n}}(\sqrt{2}+1)}{3} =$$

$$= \frac{(n^{\frac{1}{n}})^3(\sqrt{2}+1)}{3} \to \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$$

Also konvergiert die Reihe.

Aufgabe 4

a)

Es ist folgende Gleichung zu beweisen.

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) \quad \text{für} \quad x \to 0$$

Es gilt zunächst

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = \binom{n}{n} x^{n-n} + \binom{n}{n-1} x^{n-(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^{n-k} =$$

$$= 1 + nx + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

Nun bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^{n-k}}{x} = 0$$

Dies gilt aber, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^{n-k}}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^{n-k-1} = 0$$

und alle Potenzen von x, die in der Summe vorkommen positiv sind.

b)

Es ist zu zeigen

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3) \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x^2 + 1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 2$$

Da $2 \neq 0$ und $2 \neq \infty$ ist obige Gleichung gezeigt.

Aufgabe 5

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2})$ konvergiert, da sie die Summe den aus zwei konvergenten Reihen $\sum \frac{1}{n^2}$ und $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ darstellt, wobei letztere nach dem Leibnizkriterium konvergiert.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

divergiert, nach folgender Abschätzung:

$$\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^{n-1}}{n} > \frac{1}{3n}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der bekannten Abschätzung (siehe Übung)

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} > \frac{1}{3}$$

Aufgabe 6

a)

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}(\frac{n+1}{n})^{n-1} = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^{n-1} \leq \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n \leq \frac{3}{n} \to 0$$

Also gilt $a_n \to 0$, a_n ist eine Nullfolge.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n-1}(n+1)^{n+1}}{n^n(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n > 1$$

Demnach ist a_n monoton fallende Nullfolge und damit nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergent.

b)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ wird untersucht}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{100}{\sqrt{n}}} \to 0$$

Demnach ist also a_n Nullfolge.

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+101} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{(n+100)^2}{(n+101)^n}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} \leq \frac{n^2+202n+101^2}{n^2+200n+100^2} \Leftrightarrow 100^2+200+\frac{100^2}{n} \leq n+(101)^2$$

Die letzte Aussage ist ab einem $n = n_0$ erfüllt, demnach ist ab diesem n_0 a_n monoton fallend. Also sind die Voraussetzungen für das Leibnizkriterium erfüllt und die Reihe konvergiert.

c)

Die Reihe ist konvergent, weil sie als geometrische Reihe ($q = \frac{1}{2}$) absolut konvergiert.

Man kann das auch mittels Leibniz Kriterium beweisen. Die Reihe lässt sich nämlich als eine Summe von zwei alternierenden Reihen darstellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

Jede diese Reihe ist nach Leibniz konvegent. Damit ist auch die zu untersuchende Reihe auch konvergent.

Aufgabe 7

Die erste Anordnung der Summanden lässt sich schreiben als

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, wie bei der Untersuchung von a_n sofort einzusehen ist.

Anstelle der zweiten, umgeordneten Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots \tag{1}$$

betrachten wir zuerst diese mit angesetzten Klammern

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Sie ist nicht unbedingt gleich (1) (Denken Sie z.B. an der Reihe in der Aufgabe 2 a)). Aus der Divergenz der letzten folgt **aber** die Divergenz der Reihe (1).

Ferner aus der Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

folgt nach Minorantenkriterium die Divergenz der Reihe.