Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 4

Aufgabe 1

Satz

Ist $f : X \to Y$ im Punkt $x_0 \in X$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ im Punkt $y_0 = f(x_0) \in Y$ stetig, dann ist auch die Funktion $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $g(y)$ in $y = y_0$ stetig ist, gibt es zu diesem ε ein $\sigma > 0$ derart, dass aus

$$|y - y_0| < \sigma$$

die Beziehung

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

folgt.
Da andererseits $f(x)$ in $x = x_0$ stetig ist, gibt es zu diesem σ ein $\delta > 0$ derart, dass aus

$$|x - x_0| < \delta$$

die Beziehung

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma$$

folgt. Auf Grund der Wahl von σ folgt hieraus also für $|x - x_0| < \delta$

$$|g(f(x)) - g(y_0)| = |g(f(x))) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Damit ist in der $\varepsilon - \delta$ – Sprache die Stetigkeit von $g(f(x))$ in x_0 bewiesen.

Aufgabe 2

Für $f(x) = x^2 - 3$ und $f(1) = -2,\ f(2) = 1$ liefert das Bisektionsverfahren:

i	x_i	y_i	$m_i = (x_i + y_i)/2$	$f(m_i)$
1	1	2	$\frac{3}{2} = 1.5$	$-\frac{3}{4} < 0$
2	1.5	2	$\frac{7}{4} = 1.75$	$\frac{1}{16} > 0$
3	1.5	1.75	$\frac{13}{8} = 1.625$	$-\frac{23}{64} < 0$
4	1.625	1.75	1.6875	...

Die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ konvergieren gegen $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$

Aufgabe 3

Mittels ϵ-δ-Kriterium soll folgende Aussage bewiesen werden.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

D.h. es ist folgendes zu zeigen

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x^2 - 4| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - 2| < \delta$$

Wir wählen also ein $\epsilon > 0$. o.B.d.A sei $\epsilon < 1$, dies vereinfacht später die Wahl von δ, für größere ϵ geht man analog vor. Für das zu findende δ muss für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| < \delta$ gelten

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = \underbrace{|x-2|}_{<\delta}\underbrace{|x+2|}_{<4+\delta} < \delta(4+\delta) \overset{!}{\leq} \epsilon$$

Die Forderung, dass dieser Ausdruck kleiner als ϵ wird erreicht man z.B. mit folgender Wahl von δ.

$$\delta = \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{5}$$

Denn mit dieser Wahl gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| < \delta$

$$|x^2 - 4| < \delta(4 + \delta) = \frac{\epsilon}{5}(4 + \frac{\epsilon}{5}) = \frac{4}{5}\epsilon + \frac{\epsilon^2}{25} < \epsilon$$

Diese letzte Abschätzung gilt nur, da wir vorhin $\epsilon < 1$ gesetzt hatten.
Dieses $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ erfüllt also unsere Bedingung.
Die Tabelle sieht dann wie folgt aus

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002

Aufgabe 4

Es gilt die Konstanten a, b zu finden, so dass folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b) = 0$$

Wir betrachten zunächst

$$\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1} = \frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b+1}{x+1}$$

Betrachtet man diesen Ausdruck, so folgt direkt, dass $a = 1$ sein muss, da sonst der Zähler eine höhere Potenz von x als der Nenner hat und der Gesamtausdruck damit gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen würde.
Mit $a = 1$ vereinfacht sich der Ausdruck wie folgt.

$$\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{-(1+b)x-b+1}{x+1} = \underbrace{\frac{-(1+b)}{1+\frac{1}{x}}}_{\overset{x\to\infty}{\to} -(1+b)} + \underbrace{\frac{1-b}{x+1}}_{\overset{x\to\infty}{\to} 0} \overset{x\to\infty}{\to} -(1+b) \overset{!}{=} 0$$

Aus der letzten Forderung folgt $b = -1$.

Aufgabe 5

a)

Es ist der folgende Grenzwert zu berechnen.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} \qquad (0 \neq n, m \in \mathbb{Z})$$

Dazu betrachten wir

$$\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{(x-1)}{(x-1)}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x^2+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1} = \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x^2+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1} \overset{x\to 1}{\to} \frac{m}{n}$$

Im Zähler stehen m Summanden, die alle gegen 1 gehen und im Nenner n Summanden, die gegen 1 gehen.
Es gilt also

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}$$

b)

Es ist der folgende Grenzwert zu berechnen.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$$

Dazu betrachten wir

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} - x = \frac{(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)(\sqrt{(x+a)(x+b)} + x)}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} =$$

$$= \frac{x^2 + ax + bx + ab - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \frac{(a+b)x}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} + \frac{ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} =$$

$$= \frac{(a+b)}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{(a+b)}{x} + \frac{ab}{x^2}}}_{\overset{x\to\infty}{\to} 1} + 1} + \underbrace{\frac{ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x}}_{\overset{n\to\infty}{\to} 0} \overset{x\to\infty}{\to} \frac{a+b}{2} + 0 = \frac{a+b}{2}$$

Also gilt

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) = \frac{a+b}{2}.$$