Mathematik für Informatiker 2 Prof.PhD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 5

Aufgabe 1

$$x \in [1,10]; \qquad y = x^2$$

Suchen $\delta > 0$, so dass

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |y - y'| = |x^2 - x'^2| < \varepsilon \qquad x, x' \in [1,10]$$

Es gilt

$$|y - y'| = |x^2 - x'^2| = |(x - x')(x + x')| = \underbrace{|x - x'|}_{<\delta} |x + x'| < \delta \underbrace{|x + x'|}_{\leq 20} \leq 20 \cdot \delta$$

Die Abschätzung durch 20 funktioniert, da $x, x' \in [1,10]$. Wir wählen also $\delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Damit wird $|y - y'| < \varepsilon$. Nun berechnen wir zu den drei ε die passenden δ.

$$a)\ \delta = \frac{1cm^2}{20cm} = 0.05cm \quad b)\ \delta = \frac{0.01cm^2}{20cm} = 0.0005cm \quad c)\ \delta = \frac{0.0001cm^2}{20cm} = 0.000005cm$$

Aufgabe 2

Die Funktion

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$$

ist im Intervall $(0,1)$ stetig, da sie die Verkettung der stetigen Funktionen

$$x \overset{g}{\mapsto} \frac{\pi}{x} \quad \text{und} \quad y \overset{h}{\mapsto} \sin(y); \qquad f = h \circ g$$

ist.
Außerdem ist f beschränkt, da gilt

$$|\sin(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Wäre die Funktion f gleichmäßig stetig im Intervall $(0,1)$, so müsste insbesondere gelten

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta : \quad \text{wenn } \ |x-y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wir werden nun aber zeigen, dass man für ein so (beliebig) kleines δ immer zwei Punkte x und y findet mit $|x-y| < \delta$, so dass ihre Funktionswerte einen Abstand von 1 haben.

Sei also $\delta > 0$ (beliebig und fixiert), dann existiert für dieses δ immer ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $x = \frac{1}{m}$ und $y = \frac{2}{2m+1}$ folgt

$$|x-y| = \left| \frac{1}{m} - \frac{2}{2m+1} \right| = \left| \frac{1}{m(2m+1)} \right| < \delta$$

Für diese x und y gilt jedoch:

$$|f(x) - f(y)| = \left| f(\frac{1}{m}) - f(\frac{2}{2m+1}) \right| = |\sin(\pi m) - \sin(\frac{\pi}{2} + \pi m)| = |0 \pm 1| = 1$$

f kann also nicht gleichmäßig stetig im Intervall $(0,1)$ sein.

Aufgabe 3

Sei die Funktion f im Intervall (a,b) gleichmäßig stetig. Das bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall x, y \in (a,b) \text{ mit } |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Nun ist zu zeigen, dass f im Intervall (a,b) stetig ist.
Wählen $x^* \in (a,b)$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass f in x^* stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Existenz eines δ, so dass

$$\forall y \in (a,b) \text{ mit } |x^* - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x^*) - f(y)| < \varepsilon$$

(Wir nutzen also die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit, bei festgehaltenem x^*, dafür gilt die Abschätzung insbesondere.) Also folgt die Stetigkeit von f in x^* (nach dem $\varepsilon - \delta$–Kriterium).

Aufgabe 4

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$
$$f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + (x-1)2(x-2)(x-3)^3 + (x-1)(x-2)^2 3(x-3)^2$$
$$f(1) = (1-2)^2(1-3)^3 = (-2)^3 = -8; \qquad f(2) = 0; \quad f(3) = 0$$

Aufgabe 5

a)

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}; \qquad y' = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

b)

$$y = x\sqrt{1+x^2} \qquad y' = \sqrt{1+x^2} + x(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

c)

$$y = \sin^n(x)\cos(nx);$$
$$y' = n\sin^{n-1}(x)\cos(x)\cos(nx) + \sin^n(x)(-\sin(nx)n) = n\sin^{n-1}(x)(\cos(x)\cos(nx) - \sin(x)\sin(nx)))$$

d)

$$y = e^x(x^2-2x+2); \qquad y' = e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x(x^2-2x+2+2x-2) = e^x x^2$$

e)

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}}; \qquad y' = e^{\frac{\log x}{x}}\frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \sqrt[x]{x}\frac{1-\log x}{x^2}$$