Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 6

Aufgabe 1

Ausgehend von der Gleichung

$$y(x)^3 + 3y(x) = x$$

differenzieren wir diese nach x und erhalten somit

$$3y(x)^2 y'(x) + 3y'(x) = 1$$

Diese Gleichung formen wir nach y' um und erhalten y' als Funktion von y.

$$y' = \frac{1}{3(y^2+1)}$$

Aufgabe 2

Wir berechnen die folgende Ableitung

$$\frac{dy}{dx} \qquad \text{wobei} \quad x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Dazu berechnen wir zunächst die Ableitungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} \frac{\sqrt{1+t^2} - t(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$$

$$= \sqrt{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} \frac{-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}} \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|} \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{(1+t^2)}$$

Damit berechnet sich $\frac{dy}{dx}$ zu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ -1, & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Der Satz von Rolle ist für die Funktion

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

u überprüfen. f hat Nullstellen bei $1, 2, 3$. Es gilt weiterhin

$$f'(x) = (x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2) = x^2+6-5x+x^2+3-4x+x^2+2-3x = 3x^2-12x+11$$

wischen je zwei Nullstellen der Funktion f muss nun eine Nullstelle der Ableitung f' liegen. estimmen wir die Nullstellen von f':

$$3x^2 - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{11}{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{11}{3}} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Diese beiden Nullstellen liegen jeweils zwischen zwei Nullstellen von f:

$$2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1,2) \quad \text{und} \quad 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \in (2,3)$$

Der Satz gilt also tatsächlich!

Aufgabe 4

Es gilt einen Punkt auf der Kurve $y = x^3$ zu finden, so dass die Tangente an diesen Punkt parallel zur Sekante durch die Punkte $(-1, 1)$, $(2, 8)$ ist.
Dazu muss man die Steigung beider berechnen, denn Geraden sind im $\mathbb{R}^2$ parallel, wenn sie dieselbe Steigung haben.
Die Steigung der Sekante berechnet sich leicht zu

$$m_{Sekante} = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

Wir müssen nun einen Punkt auf der Kurve $y = x^3$ finden, so dass die durch ihn verlaufende Tangente eine Steigung von 3 hat.
Die Steigung der Tangente durch einen Punkt ist genau die Ableitung an diesem Punkt.

$$y' = 3x^2$$

Es muss also gelten

$$y' \overset{!}{=} 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

An der Stellen $x = \pm 1$ ist also die Bedingung erfüllt. Nun berechnen wir die y-Komponenten und gelange somit zu den Punkten

$$(1,1), \quad (-1,-1).$$

(Siehe auch die geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes von Lagrange)

Aufgabe 5

Werde bei den folgenden Grenzwerten mit dem Symbol

$$\rightarrow$$

das getrennte Differenzieren nach x von Zähler und Nenner bezeichnen, also

$$\frac{f}{g} \rightarrow \frac{f'}{g'}.$$

a)

$$\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} \rightarrow \frac{2 \cos x \sin x}{-2 \cos x \sin x(1 - \cos x) + \cos^2 x(\sin x)}$$
$$= \frac{2}{-2(1 - \cos x) + \cos x}$$

Also können wir schreiben

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{-2(1 - \cos x) + \cos x} = \frac{2}{-2(1-1)+1} = 2$$

b)

$$\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} \rightarrow \frac{\frac{a \cos(ax)}{\sin(ax)}}{\frac{b \cos(bx)}{\sin(bx)}} = \frac{a \cos(ax) \sin(bx)}{b \sin(ax) \cos(bx)} \rightarrow \frac{a}{b} \frac{-a \sin(ax) \sin(bx) + b \cos(ax) \cos(bx)}{a \cos(ax) \cos(bx) - b \sin(ax) \sin(bx)}$$

Also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{b} \frac{-a \sin(ax) \sin(bx) + b \cos(ax) \cos(bx)}{a \cos(ax) \cos(bx) - b \sin(ax) \sin(bx)} = \frac{a}{b} \frac{b}{a} = 1$$

c)

$$\frac{x^n}{e^{ax}} \to \dots \text{(n-mal)} \dots \to \frac{n!}{a^n e^{ax}}$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$$

d)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \to \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \to \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

e)

Berechnen hier zunächst

$$(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})} = e^{\frac{1}{x}(\ln((1+x)^{\frac{1}{x}})-1)} =$$

$$e^{\frac{1}{x}(\frac{\ln(1+x)}{x}-1)} = e^{\frac{1}{x^2}(\ln(1+x)-x)}$$

Nun gilt für den Exponenten

$$\frac{1}{x^2}(\ln(1+x) - x) \to \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \frac{1 - (1+x)}{2x(1+x)} = \frac{-x}{2x + 2x^2} = \frac{-1}{2 + 2x}$$

Danach gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\ln(1+x) - x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2+2x} = -\frac{1}{2}$$

Insgesamt folgt dann

$$\lim_{x\to 0}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}(\ln(1+x)-x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\ln(1+x)-x)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

f)

Berechnen hier zunächst

$$x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \to \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

Also gilt

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} -x = 0$$

Damit berechnen wir nun

$$\lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to +0} x \ln x} = e^0 = 1$$