Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 7

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
y &= f(\frac{1}{x}) \\
y' &= f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) \\
y'' &= f''(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})(-\frac{1}{x^2}) + f'(\frac{1}{x})(\frac{2}{x^3}) = \frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x}) \\
y''' &= f'''(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})(\frac{1}{x^4}) + f''(\frac{1}{x})(-\frac{4}{x^5}) + f''(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})(\frac{2}{x^3}) + f'(\frac{1}{x})(-\frac{6}{x^4}) \\
&= -\frac{1}{x^6}f'''(\frac{1}{x}) - \frac{6}{x^5}f''(\frac{1}{x}) - \frac{6}{x^4}f'(\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
y &= f(\phi(x)) \\
y' &= f'(\phi(x))\phi'(x) \\
y'' &= f''(\phi(x))(\phi'(x))^2 + f'(\phi(x))\phi''(x) \\
y''' &= f'''(\phi(x))(\phi'(x))^3 + f''(\phi(x))2(\phi'(x))\phi''(x) + f''(\phi(x))\phi'(x)\phi''(x) + f'(\phi(x))\phi'''(x) \\
&= f'''(\phi(x))(\phi'(x))^3 + 3f''(\phi(x))(\phi'(x))\phi''(x) + f'(\phi(x))\phi'''(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$$
$$x' = \frac{1}{y'}$$
$$x'' = (\frac{1}{y'})' = -\frac{1}{(y')^2}(y')' = -\frac{y''}{(y')^2}x' = -\frac{y''}{(y')^2}\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$$
$$x''' = (-\frac{y''}{(y')^3})' = -\frac{y'''x'(y')^3 - \big((y')^3\big)'y''}{(y')^6} = -\frac{y'''(y')^2 - 3(y')^2(y'')^2x'}{(y')^6}$$
$$= -\frac{y'''y' - 3(y'')^2}{(y')^5}$$

Aufgabe 3

Streng monoton sind die Funktionen an den Stellen, an denen die erste Ableitung von 0 verschieden ist.

a)

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(x+100) - \sqrt{x}}{(x+100)^2}$$
$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(x+100) - \sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}(x+100) - x = -\frac{x}{2} + 50 \Leftrightarrow x = 100$$

An der Stelle $x = 0$ läßt sich keine Aussage treffen, da die erste Ableitung dort nicht existiert. Im Intervall $(0, 100)$ ist die Funktion y streng monoton wachsend (dort ist $y' > 0$) und im Intervall $(100, \infty)$ - streng monoton fallend (dort ist $y' < 0$).

b)

$$y = \frac{x^2}{2^x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x2^x - \ln 2x^2 2^x}{2^{2x}}$$
$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x2^x - \ln 2x^2 2^x$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2x - \ln 2x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{2}{\ln 2}$$

Also ist die Funktion y in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(\frac{2}{\ln 2}, \infty)$ streng monoton fallend und im $(0, \frac{2}{\ln 2})$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 4

a)

Es gilt im Punkt $x = 0$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
Außerdem ist
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2})$$
$$(e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2}))' = -e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2}) + e^{-x}(1 + x) = e^{-x}(-\frac{x^2}{2}) < 0 \quad \forall x > 0$$
Das bedeutet die Funktion $e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2})$ ist streng monoton fallend für $x > 0$. Da für $x = 0$ beide Seiten der Ungleichung gleich sind, die Funktion jedoch streng monoton fallend ist, gilt die Ungleichung für jeden Punkt $x > 0$.

b)

Die Ungleichung
$$\ln(1 + x) < x \qquad \text{ist äquivalent zu } 1 + x < e^x$$
Dieses folgt jedoch direkt aus a).
Es gilt nun noch zu zeigen
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) \quad \forall x > 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$. Im Punkt $x = 0$ ist sie gleich 0.
Ferner folgt:
$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1 + x} = \frac{-x^2}{1 + x} < 0, \qquad \text{wenn } x > 0$$
Die Funktion ist also streng monoton fallend auf dem Intervall. Es folgt also $f(x) < f(0) = 0$ wenn $x > 0$.

Aufgabe 5

Berechnen zunächst die Ableitung im Punkt $x = 0$.
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}(1 + x\sin(\frac{1}{x})) = 1$$
Also ist die Ableitung im Punkt $x = 0$ positiv, damit wächst die Funktion in diesem Punkt streng monoton. Im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt für $x \neq 0$
$$f'(x) = 1 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

Es ist nun ein $x_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ zu finden, für das $f'(x_k) \leq 0$ gilt. Insbesondere für $x_k = \frac{1}{2\pi k}, k \to \infty, k \in \mathbb{Z}$ gilt $f'(x_k) = 0$.

Aufgabe 6

a)

$$y = x \sin(\ln x) \quad \Rightarrow \quad y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$$
$$y'' = \cos(\ln x)\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\big(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)\big)$$

Wendepunkte sind hier die Nullstellen der zweiten Ableitung, also

$$0 = \frac{1}{x}\big(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)\big) \Leftrightarrow 0 = \big(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)\big)$$
$$\Leftrightarrow \cos(\ln x) = \sin(\ln x) \Leftrightarrow \tan(\ln(x)) = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\pi}{4} + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = e^{\frac{\pi}{4} + \pi k}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Dies sind die Wendepunkte. Auf den Intervallen $e^{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k} < x < e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}$ ist die Funktion konvex (da dort $y''(x) > 0$) und auf den Intervallen $e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k} < x < e^{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}$ ist sie konkav (da dort $y''(x) < 0$).

b)

$$y = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -e^{-x^2} 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = -2(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$
$$0 = -2(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}) \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die Wendestellen liegen also bei $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
y ist auf dem Intervall $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ konkav bzw. auf dem Intervallen $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ konvex, da dort die zweiten Ableitungen entsprechend $y'' < 0$ bzw. $y'' > 0$.