Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 8

Aufgabe 1

a)

Die Reihenentwicklung für e^y lautet bis zur dritten Ordnung

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Mit $y = 2x - x^2$ folgt dann

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} &= 1+2x-x^2+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-8x^4+2x^5-4x^4+4x^5)+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5)+\frac{1}{120}(32x^5)+o(x^5) \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

wobei $o((2x - x^2)^5) = o(x^5)$ benutzt wurde.

b)

Die Entwicklung für $\frac{1}{x+1}$ lautet

$$\frac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + o(y^4)$$

Die Entwicklung für $\frac{e^x-1}{x} - 1$ lautet

$$\frac{e^x - 1}{x} - 1 = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

Eingesetzt liefert dies

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)}_{y}+1} = 1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!})^2-$$

$$-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!})^3+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!})^4+o(x^4) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4),$$

wobei $o((\frac{e^x-1}{x}-1)^4) = o(x^4)$ gilt.

c)

Die Reihenentwicklung für $\sin y$ bis zur dritten Ordnung lautet

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(x^3)$$

Mit $y = \sin x$ folgt

$$\sin(\sin x) = (x-\frac{x^3}{6}) - \frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

wobei $o(\sin^3 x) = o(x^3)$ benutzt wurde.

Aufgabe 2

a)

Entwickeln den Ausdruck bis zur dritten Ordnung um den Wert 27. Dabei sei $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$T_{f,27}(30) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(27)}{k!}(30-27)^k = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{27}^2}(30-27) - \frac{\frac{2}{9}}{2\sqrt[3]{27}^5}(30-27)^2 + \frac{\frac{10}{27}}{6\sqrt[3]{27}^8}(30-27)^3$$

$$= 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{9}3 - \frac{\frac{2}{9}}{486}9 + \frac{\frac{10}{27}}{39366}27 = 3.107249911$$

Der dabei gemachte Fehler berechnet sich mittels

$$R_3(30) = \frac{f^{(4)}(\theta)}{(4)!}(30-27)^4 = \frac{1}{24}(-\frac{80}{81\sqrt[3]{\theta}^{11}})3^4 = -\frac{10}{3\cdot 81\sqrt[3]{\theta}^{11}}3^4 = -\frac{10}{3\sqrt[3]{\theta}^{11}}$$

Mit $\theta \in [27, 30]$ lässt sich der Betrag des Fehlers abschätzen durch

$$|R_3(30)| \leq \frac{10}{3\sqrt[3]{27}^{11}} = \frac{10}{3\cdot 177147} = 0.0000188$$

b)

Entwickeln den Ausdruck bis zur vierten Ordnung um den Wert 0. Dabei sei $f = \sin x$. Rechnen im Bogenmaß($18° \approx 0.31416\ rad$).

$$T_{f,0}(0.31416) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(0.31416)^k = 0.31416 - \frac{1}{6}(0.31416)^3 = 0.30899$$

Der dabei gemachte Fehler berechnet sich mittels

$$R_4(0.31416) = \frac{f^{(5)}(\theta)}{(5)!}(0.31416)^5 = \frac{\cos(\theta)}{(5)!}(0.31416)^5 =$$

$$= \frac{\cos(\theta)}{120}0.00306023 \leq \frac{1}{120}0.00306023 = 2.55 \cdot 10^{-5} \qquad , \text{da } \theta \in [0, 0.31416]$$

c)

Es sei $f = \arctan x$.

$$T_{f,0}(0.8) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(0.8)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(0.8)^{2n+1}$$

Berechnet man bis k=20, so gilt

$$T_{f,0}(0.8) \approx \sum_{k=0}^{20} \frac{(-1)^n}{2n+1}(0.8)^{2n+1} = 0.67490$$

Der dabei gemachte Fehler berechnet sich mittels

$$|R_{21}(0.8)| = |\frac{f^{(21)}(\theta)}{(21)!}(0.8)^{21}| = \frac{20!}{21!}|\sin[(21)(\arctan(\theta)+\frac{\pi}{2})]||\cos^{21}(\arctan\theta)||0.8|^{21} \leq \frac{1}{21}0.8^{21} = 4.39 \cdot 10^{-4}$$

wobei $\theta \in [0, 0.8]$ Habe die Formel für die n-te Ableitung von arctan verwendet.

$$\arctan^{(n)}(x) = (n-1)! \sin(n(\arctan x + \frac{\pi}{2})) \cos^n(\arctan x)$$

Aufgabe 3

a)

Berechnen zunächst die Taylorreihe für $f = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = -\frac{2}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Damit berechnet sich der Grenzwert wie folgt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{4!}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{4!} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = -\frac{2}{4!} = -\frac{1}{12}$$

b)

Berechnen zunächst die Taylorreihe für $f = e^x \sin x$.

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Damit berechnet sich der Grenzwert wie folgt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 4

a)

Zu untersuchen ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$$

Wir berechnen den Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1$$

Bei $x = 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^p} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Diese Reihe konvergiert für $p > 1$ absolut und divergiert für $p \leq 1$.
Bei $x = -1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^p} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$$

Diese Reihe konvergiert dem Leibnizkriterium nach für alle $p > 0$. Sie konvergiert sogar absolut für $p > 1$. Für $p \leq 0$ divergiert die Reihe.

b)

Zu untersuchen ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Wir berechnen den Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n+1)!)}{(2n)!((n+1)!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} = 4$$

Für $x = 4$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

ist zu untersuchen. Betrachten wir die Summanden unter Verwendung der *Stirlingschen Formel*:

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \to \frac{((\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n})^2}{((\frac{2n}{e})^{2n} \sqrt{2\pi 2n})} 4^n = \sqrt{\pi n} \to \infty$$

Daher kann die Reihe bei $x = 4$ nicht konvergieren (die notwendige Konvergenzbedingung ist verletzt). Für $x = -4$ existiert der Limes nicht. Also kann auch dort die Reihe nicht konvergieren