



Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II

Serie 1. (Abgabe: bis 26.04.05)

Aufgabe 1: Zeige

a) $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (1 Punkt)

b) $|ab| = |a||b|$ (1 Punkt)

c) $|a+b| \leq |a|+|b| \implies ||a|-|b|| \leq |a+b|$ (2 Punkte)

d) $|x| < y \quad \forall y \implies x = 0$ (1 Punkt)

e) $|a+b| \leq |a|+|b| \implies \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ (2 Punkte)

Aufgabe 2: Für positive Zahlen a, b definiert man das *arithmetische*, *geometrische* und *harmonische Mittel* durch

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) := \sqrt{ab}, \quad H(a, b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$$

a) Man beweise (3 Punkte)

$$H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$$

b) und zeige, dass die Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir $-A := \{-a \mid a \in A\}$. Zeige

a) $\inf\{-A\} = -\sup\{A\}$ (2 Punkte)

b) $\sup\{-A\} = -\inf\{A\}$ (2 Punkte)

Aufgabe 4: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Man beweise:

a) Ist $ad - bc \neq 0$, so ist auch $cx + d \neq 0$ und

$$y := \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist eine irrationale Zahl (4 Punkte)

b) Ist $ad - bc = 0$, so ist entweder $cx + d = 0$ oder $y \in \mathbb{Q}$. (4 Punkte)