HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK
DR. ANDREJ PONOMARENKO
DIPL.-ING. HEINZ–JÜRGEN LANGE

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II

Serie 3. (Abgabe: bis 17.05.05)

Aufgabe 1: Berechne die Summen der Reihen:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$ (**2 Punkte**)

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$ (**2 Punkte**)

c) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$ (**3 Punkte**)

Aufgabe 2: Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ (**1 Punkt**)

b) $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots$ (**2 Punkte**)

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$ (**2 Punkte**)

d) $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$ (**2 Punkte**)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$ (**2 Punkte**)

Aufgabe 3: Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz und benutze dabei Quotientenkriterium bzw. Wurzelkriterium.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ (**2 Punkte**)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (**2 Punkte**)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ (**2 Punkte**)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (**3 Punkte**)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$ (Benutze dabei $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ ohne Beweis.) (**3 Punkte**)

Aufgabe 4: Zeige

a) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$, wenn $x \to 0$ (**2 Punkte**)

b) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$, wenn $x \to \infty$ (**1 Punkt**)

Aufgabe 5: Seien die folgenden Reihen gegeben:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Man bestimme, welche der beiden konvergiert oder divergiert. (**4 Punkte**)

Aufgabe 6: Untersuche auf Konvergenz mittels Leibniz-Kriterium:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ (**2 Punkte**)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ (**3 Punkte**)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$ (**3 Punkte**)

Aufgabe 7: Beweise, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, während die folgende

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

die aus der ersten durch die Umordnung der Gliedern entstanden ist, divergiert. (**4 Punkte**)

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848 e-mail: griewank@math.hu-berlin.de andrej@math.hu-berlin.de
lange@math.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/∼gaggle/MATHINF