# Skript zur Analysisvorlesung II*

bei Professor A. Griewank

Sommersemester 2009

VL-Mitschrift von Tom S. und T. Ha N.
VL-Tex-Einbindung von Tom S. und T. Ha N.
Skriptautoren : ( $\Longrightarrow$ streubet $\Longleftarrow$ ) Tom S., Janila R., Paul . . .

14. Oktober 2009

# Inhaltsverzeichnis

# Fortsetzung 6. Integralrechnung

## §21 Der Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung

**Satz 21.1:** Mittelwertsatz der Integralrechnung
$f \in C[a,b] \implies \int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$, für $z \in [a,b]$

**Beweis :** Nach Weierstrass (Satz 12.11) existieren $x_*, x^* \in [a,b]$

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ für } a \leq x \leq b$$

Integration über $[a,b]$ ergibt wegen Monotonie und Homogenität

$$\int_a^b f(x_*)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x^*)dx$$
$$(b-a)f(x_*) \leq (b-a)f(x) \leq (b-a)f(x^*)$$
$$f(x_*) \leq \overline{f}_{(a,b)} := \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq f(x^*)$$

Wegen vorausgesetzter Stetigkeit von f, existiert ein $z \in [a,b]$,
so dass $f(z) = \overline{f}_{(a,b)} \in [f(x_*), f(x^*)]$
Warnung: Die Aussage gilt nicht für beliebiges $f \in Ri[a,b]$

$\square$

**Korollar 21.2:** Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$f \in C[a,b] \wedge 0 \leq g \in Ri[a,b]$$

$$\implies \int_a^b f(x)g(x)dx = f(z) \int_a^b g(x)dx, \text{ für } z \in [a,b]$$

**Beweis :** Wegen $g(x) \geq 0$ mit $x_*, x^*$ wie in Satz 21.1

$$f(x_*)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x^*)g(x)$$
$$\Downarrow \text{Monotonie + Homogen.}$$
$$f(x_*) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(x^*) \int_a^b g(x)dx$$

Definiere $h(x) := f(x) \int_a^b g(x)dx$, dann ist $h \in C[a,b]$ und dann:
$\exists\ z \in [a,b] : h(z) = \int_a^b f(x)g(x)dx \ \in [h(x_*), h(x^*)]$

$\square$

<u>**Beispiel:**</u> $\int_0^5 \underset{\binom{\uparrow}{g(x)}}{e^{-x}} \cdot \underset{\binom{\uparrow}{f(x)}}{\sin(x^2)} dx = \sin(z^2) \cdot \int_0^5 e^{-x} dx = -\sin(z^2) \cdot [e^{-x}]_0^5 = \sin(z^2) \cdot [1 - e^{-5}]$
aber $\sin(z^2)$ für $z \in [0,5]$ nimmt alle möglichen Zahlenwerte an und ist schwer abzuschätzen.

<u>**Satz 21.3:**</u> Hauptsatz der Differential und Integralrechnung
$f \in C[a,b] \implies F_a(\tilde{x}) := \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx \in C^1[a,b]$ mit $F_a'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$

<u>**Beweis**</u> **:** Konvergenz aus Mittelwertsatz für $b = \tilde{x}$

$$\int_a^{\tilde{x}+h} f(x)dx - \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} f(x)dx$$
$$\implies \int_a^{\tilde{x}+h} f(x)dx - \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx = hf(z)$$
$$F_a(\tilde{x}+h) - F_a(\tilde{x}) \text{ für } F_a(\tilde{x}) := \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx$$

Division durch h und Grenzübergang $h \implies 0$ ergibt

$$\lim_{h \implies 0} \frac{h}{h} f(z) = \lim_{h \implies 0} \frac{F_a(\tilde{x}+h) - F_a(\tilde{x})}{h}$$
$$\lim_{z \implies \tilde{x}} f(z) = f(\tilde{x}) = \frac{d}{d\tilde{x}} F_a(\tilde{x}) = F_a'(\tilde{x})$$

□

Interpretation: <u>Unbestimmte</u> Integration einer Funktion $f(x)$ (dh. mit variablen Obergrenze „$\tilde{x}$“) ergibt eine Satmmfunktion $F_a(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx$, die stetig differenzierbar ist und deren Ableitung genau : $f(\tilde{x})$ lautet.
M.a.W. Die Differentation ist die Umkehrung der unbestimmten Integration
.

<u>**Bemerkung:**</u> Bislang wurde mit $\tilde{x}$ die obere Schranke von der Integrationsvariable $x$ unterschieden.
Im allgemeinen wird jedoch nur $F_a(x) = \int_a^x f(x)dx + C$, bzw. bleibt zudem $a$, die untere Schranke, unspezifiziert und deshalb wird häufig nur $F(x) = \int f(x)dx + C$ hingeschrieben, da für
$a \neq \tilde{a}$ gilt : $F_a(\tilde{x}) - F_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{a}} f(x)dx =$ konstant bezüglich $\tilde{x}$.
M.a.W. $F(x)$ bezeichnet irgendeine Funktion deren Ableitung $f(x)$ ist. $C$ ist eine Konstante.

| Integrant v. $f(x)$ | Stammfkt. $F(x) = \int f(x)dx + C$ | Bedingung |
|---|---|---|
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $n \in \mathbb{Z}$; $n \neq -1$ |
| $x^{-1}$ | $\log(x) + C$ | $x \in \mathbb{R}^+$ |
| $x^\alpha$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$; $x > 0$ |
| $e^{ax}$ | $\frac{e^{ax}}{a} + C$ | $c \in \mathbb{R}$; $c \neq 0$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | |
| $\cos x$ | $\sin x$ | |

<u>ABER:</u> $f(x) = e^{-x^2} \implies F(x) = \int e^{-x^2} dx$ besitzt keine symbolische Darstellung durch den bislang bekannten Vorrat an elementaren Funktion. Als sogenannte Errorfunktion jedoch äußerst wichtig.
spezielle Funktion : $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$
<u>Gute Nachricht</u> : Bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ lassen sich für beliebig komplizierte, aber hinreichend glatte Integranten $f(x)$ sehr effektiv und zuverlässig berechnen.

**Beispiel:**

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}f(a) + \sum\limits_{i=a}^{n-1} \underbrace{f(a+ih)}_{x_i} + \frac{h}{2}f(b)$ mit $h = \frac{(b-a)}{n}, n \in \mathbb{N}$

**Satz:** Hauptsatz:
Jedes unbestimmte Integral, d.h. für beliebiges $a$ ist eine Satmmfunktion von $f(x)$, dh. es gilt für $F_a$:

$$\frac{d}{dx}F_a(x) = f(x) \text{ für } x \in [a,b]$$

**Folgerung:** $F_a - F_{\tilde{a}}$ hat immer die Ableitung $\frac{d}{dx}[F_a - F_{\tilde{a}}] = f(x) - f(x) = 0$ und ist deshalb nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung :

$$\text{Schreibweise : } F(x) = \int f(x)dx + C \;\Longleftarrow\; \text{ generische Konstante}$$

**Lemma 21.4:** Für beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ gilt :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

**Beweis :**

$$F(x) - F_a(x) = c \in \mathbb{R}\,,\ \text{da beide Stammunktionen :}$$
$$\int_a^b f(x)dx = F_a(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$$
$$\text{da } 0 = F_a(a) = F(a) - c$$

□

**Beispiel:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 0 + 1 = 1$$

**Warnung :** Während sich prinzipiell jede, als Zusammensetzung elementarer Funktionen, aus der Bibliothek := Alphabet ($E := \{+,\ -,\ *,\ /,\ c,\ \sin,\ \cos,\ \exp,\ \sqrt{x},\ \log,\ \ldots\}$) definierte, Funktion $f(x)$ symbolisch differenzieren lässt, ist die Umkehrung, dh. die Bestimmung einer Stammfunktion $F(x) = \int f(x)$ fast nie möglich. M.a.W. : für nur ganz wenige $f(x)$ lässt sich auch $F(x)$, als Zusammensetzung elementarer Elemente in $E$, ausdrücken.

**Beispiel:** $F(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x)$. Wegen praktischer Bedeutung wurde dem skalierten unbestimmten Integral spezieller Namen gegeben.

## §22 Partielle Integration und Substitutionsregel

Da Integration nach §21 im wesentlichen Umkehrung der Differentation ist, sollte man für jede Differentationsregel eine entsprechende Integrationsregel finden können.

Linearität := $\int_{(a)}^{(b)}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_{(a)}^{(b)} f(x)dx + \beta\int_{(a)}^{(b)} g(x)dx$
Interessanter :

**Producktregel :** $\Longrightarrow$ Partielle Integration (auch theoretisch wichtig)

**Kettenregel :** $\Longrightarrow$ Substitution der Integrationsvariable (trickreich!) $\Longleftarrow$ CA - Systeme

**Herleitung der partiellen Integration :**

Producktregel für $H(x) = F(x)G(x)$, (Vereinbarung: $[F'(x) = f(x);\ H'(x) = h(x);\ G'(x) = g(x)]$)

$$h(x) = \frac{d}{dx}F(x)G(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

$\Longrightarrow$ nach Hauptsatz :

$$H(x)|_a^b = H(b) - H(a) = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

gilt vorausgesetzt : $f, g \in C[a,b] \Longrightarrow F \in C^1[a,b]$ und $G \in C^1[a,b]$

Interpretation: Ist ein Integrant zerlegbar in das Produckt $f(x)G(x)$, mit einem 'einfach' integrierbaren Faktor $f(x)$ und einem 'einfach' differenzierbaren Faktor $G(x)$, lohnt es sich im allgemeinen die partielle Integration anzuwenden, dh. die Aufgabe $f(x)G(x)$ zu integrieren, durch das Auffinden einer Stammfunktion für $F(x)g(x)$.
Wiederholte Anwendung möglich.

**Beispiel:**

$$\int_1^2 \underset{\Uparrow f(x)}{x} \cdot \underset{\Uparrow G(x)}{\log(x)}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\log(x)|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\log(x)}{2}|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx =$$
$$2\log(2) - \frac{x^2}{4}|_1^2 = 2\log(2) - (1 - \frac{1}{4}) = 2\log(2) - \frac{3}{4}$$

Hinweis : für $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ kann $C$ so gewählt werden, dass der Term $F(x)$ liquidiert wird oder sogar mehr von der gesammten Gleichung verschwindet.

Entsprechend für das unbestimmte Integral :
$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$

**Beispiel:**

$$\int \log(x)dx = \int \underset{\Uparrow f(x)}{1} \cdot \underset{\Uparrow G(x)}{\log(x)}dx = x\cdot log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + C$$

Probe : $\frac{d}{dx}(x\log(x) - x + C) = 1\cdot\log(x) + x(\frac{1}{x}) - 1 + 0 = \log(x)$

**Beispiel:**

$$\int e^x\sin(x)dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)dx =$$
$$e^x\sin(x) - (e^x\cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx) = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)dx$$

$$\Longrightarrow 2\int e^x\sin(x)dx = e^x(\sin(x) - \cos(x))$$

$$\Longrightarrow \int e^x\sin(x)dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

**Beispiel zur wiederholten Anwendung von partieller Integration:**

$$\begin{aligned}
n>0: \quad \int \sin^n(x)dx &= \int \sin(x)\cdot\sin^{n-1}(x)dx \\
\int \sin^n(x)dx &= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) - \int -\cos(x)\cdot(n-1)\sin^{n-2}(x)\cdot\cos(x)dx \\
\int \sin^n(x)dx &= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^2(x)\cdot\sin^{n-2}(x)dx \\
\int \sin^n(x)dx &= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x) - (n-1)\int \sin^n(x)dx \\
n\int \sin^n(x)dx &= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)dx \\
\int \sin^n(x)dx &= \frac{-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)}{n} + (1-\frac{1}{n})\int \sin^{n-2}(x)dx \\
\int \sin^n(x)dx &= \frac{-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)}{n} + (1-\frac{1}{n})\frac{-\cos(x)\cdot\sin^{n-3}(x)}{n} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n-2})\int \sin^{n-4}(x)dx
\end{aligned}$$

Wiederholte Reduktion des E(x)ponenten ergibt schließlich für den letzten Term $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$ falls $n$ gerade ist bzw. wenn $n$ ungerade ist: $\int \sin^0(x)dx = x$.

## Herleitung der Substitutionsregel aus der Kettenregel

Seien $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$, $h(x) = H'(x)$ und $H(x) = G(F(x))$. Die Kettenregel der Differentiation besagt dass $h(x) = H'(x) = [G(F(x))]' = g(F(x))\cdot f(x)$ Nach dem Hauptsatz erfüllt $H(x)$ als Stammfunktion von $h(x)$: $\int_a^b h(x)dx = H(x)|_a^b$. Also gilt:
$\int_a^b g(F(x))\cdot f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = H(x)|_a^b = H(b) - H(a) = G(F(b)) - G(F(a)) = G(y)|_{F(a)}^{F(b)} = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$
$\implies \int_a^b g(F(x))\cdot f(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$
In Leibniz-Notation: mit $y = F(x) \implies f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{dy}{dx}$:
$\int_a^b g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$ Die ursprüngliche Integrationsvariable $dx$ wird also durch die Integrationsvariable $dy$ ersetzt (substituiert) nachdem es gelingt den Faktor $f(x) = \frac{dy}{dx}$ vom Integranden abzuspalten. Bei bestimmten Integralen müssen außerdem die Integrationsgrenzen angepasst werden. Für unbestimmte Integrale gilt: $\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(y)dy$

**Beispiel zur Substitution bei bestimmtem Integral:**
$\int_1^x \frac{1}{x}\ln^2(x)dx$
Substitution: $y = \ln(x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
$\int_1^x \frac{1}{x}\ln^2(x)dx = \int_0^{ln(x)} y^2dy = \frac{1}{3}y^3|_0^{ln(x)} = \frac{1}{3}\ln^3(x)$

**Beispiel zur affinen Beziehung bei der Standardsubstitution:**
$\int_a^b g(ex+c)dx$
Substitution: $y = ex + c \implies \frac{dy}{dx} = e$
$\int_a^b g(ex+c)dx = \frac{1}{e}\int_a^b g(ex+c)edx = \frac{1}{e}\int_{ea+c}^{eb+c} g(y)dy$

**Beispiel zur „Gegenrichtung“ mit „trigonometrischer Substitution“:**
$0 \le y \le 1$ : Bei $\int_0^y \sqrt{1-y^2}dy$ substituiere $y = \sin(x) \implies \frac{dy}{dx} = cos(x)$.
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ : $\int_0^x \sqrt{1-\sin^2(x)}cos(x)dx = \int_0^x cos^2(x)dx = \int_0^x 1dx - \int_0^x sin^2(x)dx$
$= x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}2\sin(x)\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}$

## §23 Integration rationaler Funktionen

**1. Fall: Quadratischer Nenner, konstanter Zähler:** $\int \frac{1}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx$.

1. Für $\alpha = 0$ lässt sich das Integral durch Substitution $y = 2\beta x + \gamma$ bilden:
$\int \frac{1}{2\beta x+\gamma} dx = \frac{1}{2\beta} \int \frac{2\beta}{2\beta x+\gamma} dx = \frac{1}{2\beta} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2\beta} \ln(y) = \frac{1}{2\beta} \ln(2\beta x + \gamma)$

2. Für $\alpha \neq 0$ lässt sich das Integral auf $\alpha = 1$ normieren: $\frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{x^2+2\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}} dx$
Sei also o.B.d.A. $\alpha = 1$:
$\int \frac{1}{x^2+2\beta x+\gamma} dx = \int \frac{1}{x^2+2\beta x+\beta^2-\beta^2+\gamma} dx = \int \frac{1}{(x+\beta)^2-\beta^2+\gamma} dx = \int \frac{1}{y^2+\gamma'} dy$ mit Substitution $y = x + \beta$ und $\gamma' = \gamma - \beta^2$

   (a) Für $\beta^2 = \gamma \iff 0 = \gamma'$: $\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x+\beta}$

   (b) Für $\beta^2 < \gamma \iff 0 < \gamma' =: \tilde{\gamma}^2$:
   $\int \frac{1}{y^2+\tilde{\gamma}^2} dy = \frac{1}{\tilde{\gamma}^2} \int \frac{1}{(\frac{y}{\tilde{\gamma}})^2+1} dy = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{(\frac{y}{\tilde{\gamma}})^2+1} \tilde{\gamma} dy = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{z^2+1} dz$
   Substituiere $z = \tan t \implies \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2(t)}$: $\frac{1}{\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{\tan(t)^2+1} \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{\sin(t)^2+\cos^2(t)} dt$
   $= \frac{1}{\tilde{\gamma}} \int 1 dt = \frac{1}{\tilde{\gamma}} t = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \arctan(z) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \arctan(\frac{y}{\tilde{\gamma}}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \arctan(\frac{y}{\sqrt{\gamma'}}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \arctan(\frac{x+\beta}{\sqrt{\gamma-\beta^2}})$

   (c) Für $\beta^2 > \gamma \iff 0 > \gamma' =: -\tilde{\gamma}^2$:
   $\int \frac{1}{y^2-\tilde{\gamma}^2} dy = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \int \frac{(y+\tilde{\gamma})-(y-\tilde{\gamma})}{(y-\tilde{\gamma})(y+\tilde{\gamma})} dy = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \int \frac{1}{y-\tilde{\gamma}} - \frac{1}{y+\tilde{\gamma}} dy = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} (\ln|y - \tilde{\gamma}| - \ln|y + \tilde{\gamma}|) = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \ln \frac{|y-\tilde{\gamma}|}{|y+\tilde{\gamma}|} = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma'}} \ln \frac{|x+\beta-\sqrt{-\gamma'}|}{|x+\beta+\sqrt{-\gamma'}|} = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\gamma}} \ln \frac{|x+\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma}|}{|x+\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma}|}$

**Lemma 23.1:**

$$\int \frac{1}{x^2+2\beta x+\gamma} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \arctan(\frac{x+\beta}{\sqrt{\gamma-\beta^2}}) & \text{für } \gamma > \beta^2 \\ -\frac{1}{x+\beta} & \text{für } \gamma = \beta^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\gamma}} \ln \frac{|x+\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma}|}{|x+\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma}|} & \text{für } \gamma < \beta^2 \end{cases}$$

**Beweis :** Durch Probe, d.h. differenzieren, wobei

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{y^2+1} \text{ und } \frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{|x|} \frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{|x|} \operatorname{sign}(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0$$

1. Fall

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \left( \frac{1}{1+\dfrac{(x+\beta)^2}{\gamma-\beta^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} = \frac{1}{\gamma+x^2+2\beta x}$$

2. Fall

$$\frac{d}{dx} \frac{-1}{x+\beta} = \frac{1}{(x+\beta)^2} = \frac{1}{x^2+2\beta+\beta^2} = \frac{1}{x^2+2\beta+\gamma}$$

3. Fall mit Herleitung:

$$0 > \gamma = -\tilde{\gamma}^2 \text{ o.B.d.A. } \beta = 0$$

$$\implies \int \frac{dx}{x^2-\tilde{\gamma}^2} = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \int \left[ \frac{1}{x-\tilde{\gamma}} - \frac{1}{1+\tilde{\gamma}} \right] dx = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \left[ \log|x-\tilde{\gamma}| - |x+\tilde{\gamma}| \right] = \frac{1}{2\tilde{\gamma}} \log \frac{|x-\tilde{\gamma}|}{|x+\tilde{\gamma}|}$$

Rücksubstitution ergibt Fall 3.

$\square$

**Lemma 23.2:** Allgemeiner rationaler Fall

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} p_j x^j}{\sum_{j=0}^{n} q_j x^j} \qquad \text{mit } q_n = 1$$

Aus Algebra ist bekannt:

- Die Menge $\mathbb{R}[X]$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten ist ein euklidischer Ring, d.h. für gegebenes $P(x)$ und $Q(x)$ existieren Polynome $S(x)$ und $R(x)$ mit

$$\begin{aligned} & P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \quad \text{mit } \deg(R(x)) < \deg(P(x)) \\ \Longrightarrow & \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = f(x) \end{aligned}$$

  Da Integration von $S(x)$ trivial o.B.d.A. mit $\deg(P) = m < \deg(Q)$

- $$Q(x) = \prod_{j=1}^{n_r} (x - \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{(n-n_r)/2} (x^2 + \beta_j + \gamma_j) \qquad \text{mit } \gamma_j > \beta_j^2$$

  wobei $\lambda_j$ für $j = 1 \ldots r$ sind reelle Nullstellen, $-\beta_j \pm i\sqrt{\gamma_j - \beta_j^2}$ komplexe Nullstellen.

- $P(x)/Q(x)$ hat immer eine Partialbruchzerlegung, die "normalerweise", d.h. wenn alle Nullstellen unterschiedlich sind, die folgende Form annimmt:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n_r} \frac{A_j}{(x - \lambda_j)} + \sum_{j=1}^{(n-n_r)/2} \frac{B_j x + C_j}{x^2 + 2\beta_j + \gamma_j} \qquad \text{mit } A_j, B_j, C_j \in \mathbb{R} \text{ eindeutig}$$

  Auffinden der Koeffizienten $A_j, C_j, D_j$ durch Koeffizientenvergleich in polynomialer Identität:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n_r} A_j \frac{Q(x)}{(x - \lambda_j)} + \sum_{j=1}^{(n-n_r)/2} (B_j x + C_j) \left( \frac{Q(x)}{x^2 + 2\beta_j x + \gamma_j} \right)$$

  Integration nach Partialbruchzerlegung erfolgt pro Term:

$$\begin{aligned} \int \frac{A_j}{x - \lambda_j} dx &= A_j \log|x - \lambda_j| \\ \int \frac{B_j x + C_j}{x^2 + 2\beta_j + \gamma_j} dx &= \int \frac{B_j(x + \beta_j) + C_j - B_j \beta_j}{x^2 + 2\beta_j + \gamma_j} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2B_j(x + \beta_j)}{x^2 + 2\beta_j + \gamma_j} dx + \int \frac{C_j - B_j \beta_j}{x^2 + 2\beta_j + \gamma_j} dx \\ &= \frac{B_j}{2} \log|x^2 + 2\beta_j x + \gamma_j| + (C_j - \beta_j B_j)(\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{wie Lemma 23.1}}) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Auch in "nicht normalen"Fällen (Nullstellen mehrfach) ist die Integration von $P(x)/Q(x)$ möglich und ergibt:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \text{polynomiale} + \text{rationale} + \text{polyn. logarith.} + \text{poly. arctan}$$

**Beispiel:**

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{x^2+x-1}{x^3+x} \\
&= \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
P(x) &= x^2+x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\
&= (A+B)x^2 + Cx + A \\
&\implies A=-1 \quad C=1 \quad B=2 \\
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{-1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} \\
\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= -\log|x| + \log|x^2+1| + \arctan(x)
\end{aligned}
$$

## §24 Anwendungen und uneigentliche Integrale

**Beispiel:** Fläche:

1. Cartesisch, d.h. Rand gegeben durch $y = f(x) \geq 0$.

$$A \approx \sum f(x) \cdot \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \int_a^b f(x)dx$$

2. Polar, d.h. Rand gegeben durch $r = r(\varphi)$

$$A \approx \frac{1}{2} \sum r(\varphi) \cdot \Delta\varphi \xrightarrow[\Delta\varphi \to 0]{} \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r(\varphi)d\varphi$$

**Beispiel:** Viertelkreis: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $0 \leq x \leq 1$

Cart. $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ (durch Substitution $x = \sin\varphi$.)

Polar $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

**Beispiel:** Bogenlänge $L$ der Randkurve:

Cartesisch:

$$
\begin{aligned}
L &= \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sum \Delta x \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \\
&\downarrow \Delta x \to 0 \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx
\end{aligned}
$$

Polar:

$$
\begin{aligned}
L &= \sum \sqrt{r^2(\Delta\varphi)^2 + (\Delta r)^2} = \sum \Delta\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}\right)} \\
&\downarrow \Delta\varphi \to 0 \\
&= \int \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi \qquad \text{mit } r' = \frac{\Delta r}{\Delta\varphi}
\end{aligned}
$$

**Beispiel:** Verallgemeinerung von Cartesisch und Polar

$$(x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{Kurvendarstellung}$$
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \qquad \text{mit } x'(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

**Satz:** Volumen eines Rotationskörpers (Faß, Vase)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \qquad \sum \pi f(x)^2 \Delta x$$
$$M = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot f(x) dx \qquad \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \cdot 2\pi f(x)$$

**Definition 24.1:** Vorausgesetzt, $-\infty \leq a < c < b \leq \infty$ und $f$ ist auf jedem Intervall $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a, b)$ riemannintegrierbar. Dann setzt man im Falle der Konvergenz der jeweiligen rechten Seite:

$$\int_c^b f(x)dx := \lim_{\tilde{b} \nearrow b} \int_c^{\tilde{b}} f(x)dx \qquad \text{mit } b = \infty \text{ oder } f(b) = \infty \text{ möglich}$$
$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{\tilde{a} \searrow a} \int_{\tilde{a}}^c f(x)dx$$

sowie

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

vorausgesetzt, die Summanden auf der rechten Seite sind beide nicht unendlich mit engegengesetzten Vorzeichen. Falls die jeweiligen rechten Seiten endlich sind, sagt man, die Integrale auf der linken Seite konvergieren. Falls die Grenzwerte auf der RHS bestimmt divergieren, dann heißen die Integrale auch bestimmt divergent.

**Erinnerung**

$$\text{für } F(\tilde{b}) = \int_a^{\tilde{b}} f(x)dx, \ \lim_{\tilde{b} \nearrow b} F(\tilde{b}) = \gamma < \infty$$

ist nach Cauchy erfüllt, gdw. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ b_0$ : so dass $b_0 < b_1 \leq b_2 < b$ gilt:

$$|F(b_2) - F(b_1)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

**Beispiel:**

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \begin{cases} \text{konvergiert bestimmt} & \text{,falls } s > 1 \\ \text{divergiert bestimmt} & \text{,falls } s \leq 1 \end{cases}$$
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx \begin{cases} \text{konvergiert bestimmt} & \text{,falls } s < 1 \\ \text{divergiert bestimmt} & \text{,falls } s \geq 1 \end{cases}$$

Ein Beispiel für echte Divergenz, dass heißt weder bestimmte Divergenz noch Konvergenz ist $f(x) = \sin(x)$.

**Definition 24.2:** Absolute Konvergenz
$\int_a^b f(x)dx$ heißt absolut konvergent, gdw. $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergent ist.

**Satz 24.3:** (Majorantenkriterium
Falls $|f(x)| \leq g(x)$ mit $f, g$ im Inneren von $(a, b)$ riemannintegrierbar, dann folgt aus der Konvegenz von $\int_a^b g(x)dx$ die (absolute) Konvergenz von $\int_a^b f(x)$.

**Beweis :** o.B.d.A $f$ auf $[a, \tilde{b}]$ mit $\tilde{b} < b$ riemannintegrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\tilde{b} \nearrow b} \int_a^{\tilde{b}} f(x)dx \implies |\int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx| = |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx$$

$\leq \int_{b_1}^{b_2} g(x)dx$. RHS wird bel. klein wegen Konvergenz des Integrals in g.

$\square$

**Folgerung:** Für $g(x) = |f(x)|$ ergibt sich die Implikation: absolute Konvergenz $\implies$ Konvergenz

**Beispiel:**

*a)*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\text{endlich}} + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx \qquad \text{da } e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ für } x \geq 1$$

$$= -e^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{e} + \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{e}$$

*b)*

$$\int_\pi^\infty \frac{1}{x} \sin(x)dx = \lim_{b\to\infty} \left( -\frac{1}{x} \cos x \Big|_\pi^b - \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

Da $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}$ konvergiert, muss auch $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergieren.
$\implies \int_\pi^\infty \frac{1}{x} \sin(x)dx$ konvergiert.

**Satz 24.4:** Riemannsches Verlgeichskriterium für Reihenkonvergenz
Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}_+$ monoton fallend, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ genau dann konvergent, wenn das Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert.

**Beweis :** Wegen Monotonie gilt:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq f(k-1)$$

$$\implies \sum_{j=1}^k f(j) \leq \int_0^k f(x)dx \leq \sum_{j=0}^{k-1} f(j)$$

$\implies$ falls Reihe konvergent, ist Integral beschränkt.
Umgekehrt impliziert $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, dass die Reihe $\sum_{j=1}^\infty f(j)$ und somit auch $\sum_{j=0}^\infty f(j)$ beschränkt und absolut konvergent.

□

# Globale Approximation mit Hilfe von Faltungen

**Motivation**
Taylorpolynome/-reihen liefern gute Approximationen hinreichend glatter (d.h. wiederholt diffbarer) Funktionen in unmittelbarer Nachbarschaft eines Punktes. Ziel ist Approximation möglicherweise nicht-glatter, aber stetiger Funktionen in einem ganzen Intervall $[a, b]$ durch Polynome oder andere spezielle Funktionen,z.B. trigonometrische Polynome

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \cos(j\pi x) + b_j \sin(j\pi x) \ ; \ a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

**Definition 25.1:**
Für richtungsstetige Funktionen $f, g \in Re(-\infty, \infty)$ mit $\infty > ||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$ ist das **Faltungsprodukt** $h = g * f = f * g$ definiert durch:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt$$

eine eindeutig definierte Funktion auf $\mathbb{R}$. Faltung heißt auch **Konvolution**.

**Beweis :** Das unendliche Integral $h(x)$ konvergiert für beliebige $x \in \mathbb{R}$, da:
$|h(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|dt$
$\le ||f||_\infty \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|dt = ||f||_\infty \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty \implies$ absolute Konvergenz $\implies$ Konvergenz

□

Von Interesse sind Faltungen mit Familien von nichtnegativen Funktionen.

**Definition:**
Eine Folge $\delta_k \in Re(-\infty, \infty)$ von richtungsstetigen Funktionen heißt **Dirac-Folge**, falls

1. $\delta_k(x) \ge 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ; $k \in \mathbb{N}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(x)dx = 1$ für $k \in \mathbb{N}$
3. $\forall \ \varepsilon > 0 \, \forall \ r > 0 \, \exists \ k_0 : \int_{-r}^{r} \delta_k(x) \ge 1 - \varepsilon$ für $k \ge k_0$

m.a.W.: Maximal ein $\varepsilon$-Anteil der Fläche unterhalb $\delta_k(x)$ liegt außerhalb $(-r, r)$.

**Beispiel Landau Kerne:**

$$L_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_k}(1-x^2)^k & \text{, falls } |x| \le 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Im Folgenden wird die 2. Eigenschaft der obigen Definition nachgewiesen

Setze $c_k = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^k dx = 2\int_0^1 (1-x)^k \cdot (1+x)^k dx$

$\ge 2\int_0^1 (1-x)^k dx = -\frac{2}{k+1}(1-x)^{k+1}\|_0^1 = \frac{2}{k+1}$

$\implies 0 < c_k \implies \int L_k(x)dx = 1$

Im folgenden wird die 3. Eigenschaft nachgewiesen

$$\begin{aligned}
1-\int_{-r}^{r} L_k(x)dx &= 2\int_r^\infty L_k(x)dx \\
&= 2\int_r^1 L_k(x)dx \\
&= \tfrac{2}{c_k}\int_r^1 (1-x^2)^k dx \\
&\leq (k+1)\int_r^1 (1-x^2)^k dx \\
&\leq (k+1)\int_r^1 (1-r^2)^k dx \\
&= (k+1)(1-r^2)^k(1-r)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 0 für alle $r \in (0,1]$

Somit bilden Landau Kerne Dirac-Folgen.

**Satz 25.3:**

Sei $f \in C(-\infty,\infty)$ mit $||f||_\infty < \infty$ und $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Diracfolge, dann gilt für $f_k(x) := (\delta_k * f)(x)$:

1. punktweise Konvergenz, d.h. $\lim_{k \Longrightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$
2. gleichmäßige Konvergenz, d.h. $\lim_{k \Longrightarrow \infty} ||f_k - f||_\infty = 0$, falls $f$ selbst glm. stetig.

**Beweis :**

$$|f_k(x) - f(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) \cdot \delta_k dt|$$

$$\leq \int_{-r}^{-r} |f(x-t) - f(x)| \cdot \delta_k(t)dt + \int_{-\infty}^{-r} |f(x-t) - f(x)| \cdot \delta_k dt + \int_r^\infty |f(x-t) - f(x)| \cdot \delta_k dt$$

Für $\varepsilon > 0$ existiert wegen der Stetigkeit von $f$ an $x$ ein $r > 0$, so dass

$$\int_{-r}^{-r} \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \delta_k(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-r}^{r} \delta_k(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann existiert wegen der Dirac-Eigenschaft ein $k_0$, so dass für
$k \geq k_0, \int_{-r}^{r} \delta_k(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{8||f||_\infty}$ und:

$$\int_r^\infty \texttt{ bzw. } \int_{-\infty}^{-r} (|f(x-t)| + |f(x)|) \cdot \delta_k(t)dt \leq 2||f||_\infty \cdot \underbrace{\int_{-r}^{r} \delta_k(t)dt}_{\leq \frac{\varepsilon}{8||f||_\infty}} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Die Summation der drei Integrale ergibt:
$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Damit ist punktweise Konvergenz (1. Eigenschaft) bewiesen. Falls $f(x)$ gleichmäßig stetig ist, können $r$ und $k_0$ unabhängig von $x \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass ebenfalls gleichmäßige Konvergenz gegeben ist: $||f_k - f||_\infty < \varepsilon$

□

**Beispiel:**

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{, falls } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{, falls } |x| > 1 \end{cases} = \min(|x|, 1)$$

mit $\delta_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{, falls } |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= (f * \delta_k)(x) \\
&= \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} f(x-t)\tfrac{k}{2}dt \text{ falls } k \geq 2, |x| < \tfrac{1}{k}\text{folgt:} \\
f_k(x) &= \tfrac{k}{2}\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} |x-t|dt \\
&= \tfrac{k}{2}\int_{-\frac{1}{k}}^{x} |x-t|dt + \tfrac{k}{2}\int_{x}^{\frac{1}{k}} |x-t|dt \\
&= \tfrac{k}{2}\left[x(x+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{t^2}{2}|_{-\frac{1}{k}}^{x} + \tfrac{t^2}{2}|_{x}^{\frac{1}{k}} - x(\tfrac{1}{k}-x)\right] \\
&= \tfrac{k}{2}\left[x^2 - \tfrac{x}{k} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{2k^2} + \tfrac{1}{2k^2} - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x}{k} + x^2\right] \\
&= \tfrac{k}{2}[x^2 + \tfrac{1}{k^2}]
\end{aligned}$$

Rest: Übung.

An drei Ecken ist $f_k$ gerundet und einmal stetig diffbar. Gleichmäßige Konvergenz $f_k \implies f$.

**Satz 25.4 Weierstraßscher Approximationssatz:**

Jede auf einem beschränkten (kompakten) Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion $f$ lässt sich durch eine Polynomfolge $f_k(x)$ gleichmäßig annähern, so dass

$$\|f - f_k\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \|f(x) - f_k(x)\|_\infty \implies {}_k 0$$

**Beweis :**

Beweis unter Sonderannahme:

Zunächst wird angenommen, dass $[a, b] = [0, 1]$ und $f(0) = 0 = f(1)$. Dann erfüllt die triviale Erweiterung auf $(-\infty, \infty)(\forall\ x \notin [0, 1] : f(x) = 0)$ die Voraussetzung von Satz 25.3 mit Landau Kernen als Dirac-Folge.

Zu zeigen bleibt, dass $f_k$ Polynome sind.

$\delta_k(x - t) = \frac{1}{c_k} \cdot [1 - (x - t)^2]^k = \frac{1}{c_k} \cdot \sum_{j=0}^{2k} c_{kj}(t) \cdot x^j$
$c_{kj}(t)$ ist ein Polynom bezüglich $t$. Daraus folgt durch termweise Integration:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \int_0^1 f(t)\delta_k(x - t)dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{c_k} \sum_{j=0}^{2k} f(t) \cdot c_{kj}(t)x^j dt \\ &= \frac{1}{c_k} \sum_{j=0}^{2k} (x^j \cdot \int_0^1 f(t) \cdot c_{kj}(t)dt) \\ &= \text{Polynom vom Grad} \le 2k \text{ in } x \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis unter Sonderannahme erbracht.

Reduktion des allgemeinen Falles

Sei $a = \frac{1}{4}$ und $b = \frac{3}{4}$ so ist $\tilde{f} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [0, 1] \\ 4x \cdot f(a) & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ f((x - \frac{1}{4})a + (\frac{3}{4} - x)b) & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 4(1 - x)f(b) & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$

Anwendung von Weierstrass im bewiesenen Spezialfalls ergibt Folge von reellen Polynomen $\tilde{P}_k$, so dass $\|\tilde{f}(x) - \tilde{P}_k(x)\|_\infty \implies {}_k 0$.
Daraus folgt für $P_k(x) = \tilde{P}_k\left(\frac{x - (\frac{3}{2}a - b)}{2(b - a)}\right)$, dass $\|f(x) - P_k(x)\|_\infty \implies {}_k = 0$

□

**Interpretation**

Die Menge der Polynome $P[a, b]$ liegt in dem Raum $C[a, b]$ “dicht”, d.h. jedes Element $f \in C[a, b]$ ist Grenzwert einer Folge aus $P[a, b]$ und zwar bezüglich der Supremums-Norm auf $[a, b]$.

M.a.W.: Der Abschluss von $P[a, b]$ in $C[a, b]$ ist der ganze Raum $C[a, b]$. In der 4. Übung soll gezeigt werden, dass der Abschluss von $P[0, \infty)$ in $C[0, \infty)$ eine echte Teilmenge von $C[0, \infty)$ ist.

**Vereinfachung des Approximationsproblemes:**

Betrachte die $\mathcal{L}^2$-Norm auf $[a, b]$:

$$\|f\|_2 = [\int_a^b f(x)^2 dx]^{\frac{1}{2}} \le [\int_a^b \|f\|_\infty^2 dx]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_\infty \cdot \sqrt{b - a}$$

Annäherung von $f$ durch die Folge $f_k$ im quadratischen Mittel verlangt ’nur’ dass:
$\|f - f_k\|_2 \implies 0$ für $k \implies \infty$.

Wegen $\|\cdot\|_2 \le \sqrt{b - a} \cdot \|\cdot\|_\infty$ folgt aus $\|f - f_k\|_\infty \implies 0$ auch die Konvergenz im quadratischen Mittel.

Die Umkehrung ist nicht der Fall, z.B.:
für $f = 0$, $f_k = \chi_{[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}]} = \begin{cases} 1 & \text{, für } |x| \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

ergibt $\|f_k\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} 1^2 dx = \frac{2}{k} \implies 0$ für $k \implies 0$. Also konvergiert $f_k$ im quadratischen Mittel gegen $f = 0$.

Andererseits gilt für $k < l$:
$\|f_k - f_l\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x) - f_l(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_{[-\frac{1}{k},-\frac{1}{l}]\cup[\frac{1}{l},\frac{1}{k}]}| = 1$
Also ist $f_k$ keine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und kann keinen Grenzwert haben.

**Bemerkung:**
$\|f_k\|_\infty / \|f_k\|_2 = \frac{k}{2} \implies \infty$, für $k \implies \infty$.

**Ziel:**
Annäherung von periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ durch trigonometrische Polynome $f_k$ mit minimalem Abstand $\|f - f_k\|_2$.

**Definition 25.6:**
Für integrierbare Funktionen $f, g$ mit gemeinsamer Periode $T > 0$, d.h. $f(x + T) = f(x)$ und $g(x + T) = g(x)$. Setzte:

$$\|f\|_2 = \left[\int_c^{c+T} f(x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = < f, f >^{\frac{1}{2}}$$

,wobei

$$< f, g >= \int_c^{c+T} f(x)g(x)dx$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}$ beliebig und kann o.B.d.A zu 0 gesetzt werden.

**Lemma 25.7:**
Mit $\omega_k := \frac{2\pi k}{T}$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} \|\cos(\omega_0 x)\|_2^2 & = & T & \\ \|\cos(\omega_k x)\|_2^2 & = & \frac{T}{2} & \text{für } k = 1, 2, \ldots \\ \|\sin(\omega_k x)\|_2^2 & = & \frac{T}{2} & \\ < \sin(\omega_k x), \cos(\omega_l x) > & = & 0 & \text{für } k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ < \sin(\omega_k x), \sin(\omega_l x) > & = & 0 & \text{für } k \neq l \\ < \cos(\omega_k x), \cos(\omega_l x) > & = & 0 & \end{array}$$

**Beweis :**
Alle Aussagen können durch zweimalige Partielle Integration hergeleitet werden.

□

**Interpretation**
Die Funktionen $1, \sin(\frac{2\pi kx}{T}), \cos(\frac{2\pi kx}{T})$ für $k = 1, 2, \ldots$ sind orthogonal zueinander bzgl. $< , >$.

**Vorläufige Annahme:**

$f$ ist gegeben durch Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \geq 0$ und $b_k \in \mathbb{R}$ für $k \leq 1$ durch $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)$.

Gilt außerdem, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert, was insbesondere die Stetigkeit von $f$ verlangt, so darf man gliedweise integrieren.

$$\begin{aligned}\int_0^T f(x)\cos(\omega_j x)dx &= \int_0^T (a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^\infty a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)) \cdot \cos(\omega_j x)dx \\ &= a_0 \int_0^T \cos(\omega_j x)dx + \textstyle\sum_{k=1}^\infty a_k \int_0^T \cos(\omega_k x)\cos(\omega_j x)dx \\ &\quad + b_k \int_0^T \sin(\omega_k x)\cos(\omega_j x)dx \\ &= a_0 < 1, \cos(\omega_j x) > + \textstyle\sum a_k < \cos(\omega_k x), \cos(\omega_j x) > + \textstyle\sum b_k < \sin(\omega_k x), \cos(\omega_j x) >\end{aligned}$$

Für jedes $j \geq 0$ fallen auf der rechten Seite nach Lemma 25.6 alle bis auf einen Term weg, so dass:
$j = 0 \implies \int_0^T f(x)dx = a_0 \int_0^T 1dx = a_0 T \implies \mathbf{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx}$

$j > 0 \implies \int_0^T f(x)\cos(\omega_j x)dx = a_j \int_0^T \cos(\omega_j x)^2 dx \implies \mathbf{a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\cos(\omega_j x)dx}$

entsprechend ergibt sich: $\int_0^T f(x)\sin(\omega_j x)dx = b_j \|\sin(\omega_j x)\|_2^2 \implies \mathbf{b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\sin(\omega_j x)dx}$

**Definition 25.8:**
Für beliebiges integrierbares $f$ mit Periode T, nennt man

$$f_k(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos(\omega_j x) + b_j \sin(\omega_j x)$$

mit $a_j, b_j$ wie oben, die k-te **Fourierapproximation** von $f(x)$.

**Zentrale Frage:**
Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an $f$ gilt: $\|f - f_k\|_\infty \implies 0$ oder $\|f - f_k\|_2 \implies 0$ oder $f_k(x) \implies f(x)$ für bestimmte $x$.

**Satz 25.9:** Darstellung von Fourierentwicklung durch Faltung. Für periodisches integrierbares $f$ gilt mit $f_k$, wie in Definition 25.8.

$$f_k = f * D_k \text{ wobei } D_k(t) := \frac{\sin((2k+1)\pi \frac{t}{T})}{\sin(\frac{\pi t}{T})}$$

$D_k$ heißt **Dirichletkern** für $k = 1, 2, \ldots$ $D_0(t) := 1$

**Beweis :**
Sei $f_k(x) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx + \sum_{j=1}^k \frac{2}{T} \left[\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)dt \cdot \cos(\omega_j x) + \int_0^T f(t)\sin(\omega_j t)dt \cdot \sin(\omega_j x)\right]$

Da die Summe endlich ist, kann Summation und Integration vertauscht werden.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \left[1 + 2\textstyle\sum_{j=1}^k (\cos(\omega_j t)\cos(\omega_j x) + \sin(\omega_j t)\sin(w_j x))\right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \left[1 + 2\textstyle\sum_{j=1}^k \cos(\omega_j (t - x))\right] dt \\ &= \int_0^T f(x - t) D_k(t) dt\end{aligned}$$

wobei $D_k := \frac{1}{T}\left[1 + 2\sum_{j=1}^k \cos(\omega_j t)\right]$

z.z.: $D_k$ hat ausgegebene Form:

Darstellung der Fourierentwicklung durch Faltung
$f_k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t) \cdot D_k(t)$ mit $D_k(t) = 1 + 2\sum\limits_{j=1}^{k} \cos(2\pi j \frac{t}{T}) = \frac{\sin((2k+1)\pi\frac{t}{T})}{\sin(\pi\frac{t}{T})} \overset{\text{falls } T=2\pi}{=} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

Darstellung von $D_k$ durch Induktion nach $k$, $k = 0 : \Longrightarrow \ D_0(t) = 1 + 0 = 1$

**Induktionsschluss:**

$$\begin{aligned}(D_k - D_{k-1})\sin(\pi \tfrac{t}{T}) &= 2\cos(2\pi k \tfrac{t}{T})\sin(\pi\tfrac{t}{T}) = \sin((2k+1)\pi\tfrac{t}{T}) - \sin((2k-1)\pi\tfrac{t}{T}) && (1)\\ &= \sin(2k\pi\tfrac{t}{T})\cos(\pi\tfrac{t}{T}) + \sin(\pi\tfrac{t}{T})\cos(2k\pi\tfrac{t}{T}) && (2)\\ &\quad - \sin(2k\pi\tfrac{t}{T})\cos(\pi\tfrac{t}{T}) + \sin(\pi\tfrac{t}{T})\cos(2k\pi\tfrac{t}{T}) && (3)\\ &= \sin(\pi\tfrac{t}{T})\cos(2k\pi\tfrac{t}{T})\cdot 2 && (4)\end{aligned}$$

□

**Satz 25.10:** Konvergenz der Fourierreihe (Dirichlet)
Ist $f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ richtungsstetig mit Periode $T$, dann konvergiert die Fourierreihe an jedem Punkt $x$, wo $f$ links- und rechtsseitig differenzierbar ist und es gilt:

$\lim\limits_{k \Longrightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$ mit $f(x_-) = \lim\limits_{\tilde{x}\nearrow x} f(\tilde{x}), f(x_+) = \lim\limits_{\tilde{x}\searrow x} f(\tilde{x})$.
Insbesondere ergibt sich $\lim\limits_{k \Longrightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ falls $f(x_-) = f(x_+)$, i.e. $f$ stetig an $x$.

**Beispiel**
$f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$ mit $T = 2\pi$. Berechnung der Koeffizienten:

* $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin\frac{x}{2}|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx = \frac{2}{\pi}[-\cos(\frac{x}{2})]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$
* $b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\sin\frac{x}{2}|\sin(kx)}_{\text{ungerade}}dx = 0$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)|\sin\frac{x}{2}|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k+\frac{1}{2})x - \cos(k-\frac{1}{2})x]dx && (5)\\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{-\cos(k+\frac{1}{2})x}{k+\frac{1}{2}} + \frac{\cos(k-\frac{1}{2})x}{k-\frac{1}{2}}\,|_0^{\pi}] = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\pi}\frac{-1}{k^2-\frac{1}{4}} && (6)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \ |\sin(\frac{x}{2})| = \frac{2}{\pi} - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(k^2-\frac{1}{4})}\cos(kx)$

Nach Satz 25.10 gilt die punktweise Konvergenz an allen Stellen $x \in \mathbb{R}$, so dass $|\sin\frac{x}{2}|$ auch an $x = 0$ richtungsdifferenzierbar.

Probe an der Stelle $x = 0$:

$$\begin{aligned}|\sin\frac{0}{2}| = 0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(k^2-\frac{1}{4})} &= \frac{1}{\pi}[2 - \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}]] = \frac{1}{\pi}[2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}\ldots && (7)\\ &= \frac{1}{\pi}[2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0 && (8)\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Konvergenz ist langsam, da: $f(0) - f_k(0) = \frac{1}{\pi(k+\frac{1}{2})} \xrightarrow{k \Longrightarrow \infty} 0$ gerade noch.

**Beweis :**
**Hilfsaussagen:**

* 1:$\int_0^{\frac{T}{2}} D_k(t)dt = \frac{T}{2}$ da $D_k(t) = 1 + 2\sum\limits_{j=1}^{k} \cos(2\pi k\frac{t}{T}) \implies \int_{-\frac{T}{2}}^{0} D_k(t)dt = \frac{T}{2}$ und $\int_0^{\frac{T}{2}} 1 = \frac{T}{2}$ sowie $\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi k\frac{t}{T})dt = \frac{-\sin(2\pi k\frac{t}{T})}{2\pi\frac{k}{T}} |_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-\sin(k\pi)+\sin(0)}{2\pi\frac{k}{T}} = 0$

* 2:(Dirichlet-Lemma) Falls $h$ auf $[0, \frac{T}{2}]$ richtungsstetig, so gilt $\lim\limits_{k \implies \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} h(t)\sin(2\pi k\frac{t}{T}) = 0$ (geht auch mit $((2k+1)\pi\frac{t}{T})$ ).

Da $h$ richtungsstetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $h_\epsilon$ mit:
$\epsilon > ||h - h_\epsilon||_\infty = \sup\limits_{0\le t\le\frac{T}{2}} |h(t) - h_\epsilon(t)|$ Mit $Z = [z_o = 0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n = \frac{T}{2}]$ eine Zerlegung von $h_\epsilon$ ergibt sich:

$$|\int_0^{\frac{T}{2}} h_\epsilon(t)\sin(2\pi k\frac{t}{T})dx| = |\sum_{i=1}^{n}\int_{2i-1}^{2i+1} c_i\sin(2\pi k\frac{t}{T})dt| = |\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\cos(2\pi k\frac{t}{T})}{2\pi\frac{k}{T}} |_{2i-1}^{2i+1} | \tag{9}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \overbrace{|c_i|}^{\le||h_\epsilon||_\infty} \frac{|\overbrace{\cos(2\pi k\frac{z_i}{T})}^{\le 1}| + |\overbrace{\cos(2\pi k\frac{z_{i-1}}{T})}^{\le 1}|}{2\pi\frac{k}{T}} \le \frac{2||h_\epsilon||_\infty T}{2\pi k} \xrightarrow{k\implies\infty} 0 \tag{10}$$

Daraus folgt für festes $\epsilon$:

$$\lim_{k\implies\infty}\sup|\int_0^{\frac{T}{2}} h(t)\sin(2\pi k\frac{t}{T})dt| \le \lim_{k\implies\infty}\sup|\int_0^{\frac{T}{2}}(h(t)-h_\epsilon(t))\sin(\omega_k t)dt| + |\int_0^{\frac{T}{2}} h_\epsilon(t)\sin(\omega_k t)dt| \tag{11}$$

$$\le \int_0^{\frac{T}{2}} ||h-h_\epsilon||_\infty|\sin(\omega_k t)|dt + \underbrace{\lim_{k\implies\infty}|\int_0^{\frac{T}{2}} h_\epsilon(t)\sin(\omega_k t)dt|}_{=0} \le \epsilon\frac{T}{2} \tag{12}$$

$\implies$ Behauptung, da $\epsilon$ beliebig gewählt werden kann.

**Beweis der Hauptaussage:**

$$f_k(x) - \frac{1}{2}f(x_-) - \frac{1}{2}f(x_+) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-t)D_k(t)dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x_+)D_k(t)dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f(x_-)D_k(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}[f(x-t)-f(x_+)]D_k(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[f(x-t)-f(x_-)]D_k(t)dt$$

Für das zweite Integral gilt:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{\frac{[f(x-t)-f(x_-)]}{t}}_{\text{richtungsstetig auf }[0,\frac{T}{2}]}}_{\text{folgt aus vorausg. Ex. von }\lim\limits_{t\searrow 0}\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t} = -\text{ linke richtungsabl.}} \frac{t}{\sin(\pi\frac{t}{T})}\sin((2k+1)\pi\frac{t}{T})dt$$

□

Also erfüllt $h(t) := \frac{f(x-t)-f(x_-)}{\sin(\pi\frac{t}{T})}$ die Voraussetzungen von Hilfsaussage 2 und das zweite sowie entsprechend das erste Integral konvergieren für $k \implies \infty$ gegen Null $\square$

Mit Mitteln der Theorie der Hilberträume wird im folgenden bewiesen:

**Satz 25.11:** Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel.
Für richtungsstetige Funktionen $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ mit Periode $T$ konvergiert die Fourierreihe immer im quadratischen Mittel, dass heißt:
$\lim\limits_{k \implies \infty} ||f - f_k||_2^2 = \lim \int_c^{c+T} [f(x) - f_k(x)]^2 dx = 0$

# VI: Metrische Räume

## §26: Definitionen und Beispiele

metrischer, normierter und Skalarproduktraum, elementare Implikationen zwischen den Räumen,Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Youngsche Ungleichung, Hölder-Ungleichung, Minkowski-Ungleichung

**Metrische Räume**

$$\begin{array}{ccc}
\text{euklidische Räume } \mathbb{R}^n & \subset & \mathbb{C}^n \\
\cap & & \\
\text{Skalarproduktäume} & \supset & \text{Hilberträume} \supset \mathbb{C}^n \\
\cap & & \\
\text{Normierte Räume} & \supset & \text{Banachräume} \\
\cap & & \\
\text{Metrische Räume} & \supset & \text{vollständige Räume}
\end{array}$$

Hilberträume, Banachräume, vollständige Räume entsprechen dem vollständigen Abschluss von den Räumen auf der linken Seite.

**Bemerkung:**
* i.) Beliebige Teilmengen eines metrischen Raumes sind wieder metrische Räume, was für normierte Räume nicht gilt. Metrische Räume treten häufig als Teilmengen von Hilberträumen der Banachräume (z.B. Kugelfläche und andere Manngifaltigkeit).

* ii.) Bis auf Isomorphie gibt es genau einen reellen und einen komplexen Hilbertraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ oder $n = \infty$ vorausgesetzt wir verlangen Separabilität.

**Definition 26.1:** Metrischer Raum
Eine Menge $X$ heißt metrischer Raum, falls es eine Metrik genannte Abstandsfunktion $d : X \times X \implies [0, \infty]$ gibt, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

* i.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ Definitheit
* ii.) $d(x, y) = d(y, x)$ Symmetrie
* iii.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecksungleichung.

Triviales Beispiel ist die diskrete Metrik mit:
$d(x, y) = 0$ falls $y = x$, $\infty$ falls $y \neq x$

**Definition 26.2:** Normierter Raum
Ein Vektorraum $X$ über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ heißt normiert, falls eine Normfunktion $||\cdot|| : X \implies [0, \infty)$ existiert, so dass mit $|\cdot| : K \implies [0, \infty)$ der üblichen Betragfunktion in $K$ für alle $u, v \in X$ und $\alpha \in K$ gilt:

* i.) $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ Definitheit
* ii.) $||\alpha u|| = |\alpha|\ ||u||$ Homogenität
* iii.) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ Dreiecksungleichung

**Definition 26.3:** Skalarproduktraum
Ein Vektorraum $X$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt Skalarproduktraum, falls es ein inneres Produkt oder Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \implies \mathbb{K}$ gibt, so dass für alle $u, v, w \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

* i.) $\langle u, u \rangle \geq 0$ mit $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
* ii.) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ und
$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \wedge \langle u, \beta v \rangle = \bar{\beta} \langle u, v \rangle$ (Bilinearität)

* iii.) $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ mit $\bar{\cdot}$ Konjugation in $\mathbb{C}$ und Identität in $\mathbb{R}$

**Lemma 26.4:** Elementare Implikationen zwischen den Räumen
* i.) Jeder normierte Raum $X$ ist metrisch für $d(x, y) = ||x - y||$ $x, y \in X$
* ii.) Jeder Skalarproduktraum ist normiert bezüglich $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ für $u \in X$ und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v||$ für $u, v \in X$

**Beweis :**

* i.) Folgt unmittelbar aus der Definition
* ii.) Zum Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung betrachte $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq ||u + \alpha v||^2 = \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle = \langle u + \alpha v, u\rangle + \langle u + \alpha v, \alpha v\rangle \tag{13}$$

$$= \langle u, u\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle = ||u||^2 + \alpha\langle v, u\rangle + \hat{\alpha}\overline{\langle v, u\rangle} + |\alpha|^2||v||^2 \tag{14}$$

Setze $\alpha = -\frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2} = -\frac{\overline{\langle v,u\rangle}}{||v||^2}$:

$$0 \leq ||u||^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^4}||v||^2 = ||u||^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} \tag{15}$$

$$\Longrightarrow\ |\langle u, v\rangle|^2 \leq ||u||^2\ ||v||^2 \ \Longrightarrow\ |\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v|| \tag{16}$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung:

$$||u + v||^2 = |\langle u + v, u + v\rangle| \leq ||u||^2 + |\langle u, v\rangle| + |\langle v, u\rangle| + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u, v\rangle| + ||v||^2 \tag{17}$$

$$\leq ||u||^2 + 2||u||\ ||v|| + ||v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2 \ \Longrightarrow\ \text{Dreiecksungl. durch Wurzelziehen} \tag{18}$$

□

**Beispiel:**
* 1. $\mathbb{C}^n := \{(u_i)_{i=1}^n : u_i \in \mathbb{C}\}$ ist komplexer Skalarproduktraum (und sogar Hilbertraum) bezüglich des Skalarproduktes $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\bar{v}_i = \overline{\langle v, u\rangle}$
* 2. $C([a, b], \mathbb{C})$, dass heißt der komplexe Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen auf reellen Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist ein Skalarproduktraum (nicht Hilbertraum) bezüglich des inneren Produktes:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx = \int_a^b [\mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{Re}(g(x)) + \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{Im}(g(x))]dx \tag{19}$$

$$+\, i\int_a^b [\mathrm{Re}(g(x))\,\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{Im}(g(x))]dx \tag{20}$$

wobei $f \in C[a, b] \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f(x)), \mathrm{Im}(f(x)) \in C[a, b]$ und damit integriebar.
* 3. $l^2(\mathbb{C}) = \{(u_i)_{i=1}^{\infty} : u_i \in \mathbb{C}$ so dass:$||u||_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty\}$ ist Skalarproduktraum (und sogar Hilbertraum) bezüglich $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\bar{v}_i \in \mathbb{C}$.

**Bemerkung:**
Inneres Produkt ist eindeutig definiert, da nach Cauchy-Schwarz gilt:
$|\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\bar{v}_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|\ |\bar{v}_i| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|^2} \leq ||u||_2||v||_2$
Also ist $\sum_{i=1}^{\infty} u_i\bar{v}_i$ immer absolut konvergent und wir dürfen gliedweise manipulieren, zum Beispiel

um $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ zu prüfen.

**Bemerkung:**
Für den Nachweis von Normeigenschaften auf Folgen und Funktionenräumen benötigt man folgende Ungleichungen.

**Lemma 26.5:** Hölderungleichung (Verallgemeinerung von Cauchy auf $\mathbb{R}^n$)
Falls $p > 1 < q$ konjugiert sind, dass heißt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, gilt:
* i.) $|x||y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$ Youngsche Ungleichung
* ii.) $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ Hölderungleichung (ergibt Cauchy-Schwarz für $p = q = 2$)

**Beweis :**
* i.) Übung
* ii.) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{|u_i||v_i|}{||u||_p ||v||_q} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{1}{p} \frac{|u_i|^p}{||u||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|v_i|^q}{||v||_q^q}) = \frac{1}{p||u||_p^p} \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q||v||_q^q} \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|^q$ mit $||u|| = [\sum |u_i|^p]^{\frac{1}{p}}$ und $||v|| = [\sum |v_i|^q]^{\frac{1}{q}} \implies \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{|u_i||v_i|}{||u||_p ||v||_q} \leq 1 \implies \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i||v_i| \leq ||u||_p ||v||_q$

□

**Satz 26.6:** Minkowski-Ungleichung
Für$p \geq 1$ und $u = (u_i)_{i=1}^{\infty}, v = (v_i)_{i=1}^{\infty}$ gilt:
* i.) $||u+v||_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i + v_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|^p} + \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |v_i|^p} = ||u||_p + ||v||_p$
* ii.) $[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}} + [\int_a^b |g(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$

**Zusammenfassung:**
lp-Räume sind normiert, Äquivalenz von Normen ,Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Raum

**Rückblick:**
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ konjugiert, dann gelten folgende Ungleichungen:

* Young: $|x||y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$
* Hölder: $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \underbrace{(|\sum |x_i|^p|)^{\frac{1}{p}}}_{=||x||_p} \underbrace{(|\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q|)^{\frac{1}{q}}}_{=||y||_q}, \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \underbrace{[\int_a^b |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}}_{||f||_p} \underbrace{[\int_a^b |g(x)|^q dx]^{\frac{1}{q}}}_{||g||_q}$

Aus diesen folgt nachstehende Ungleichung.
**Satz 26.6:** Minkowski-Ungleichung
Für $p \geq 1, p < \infty$ gelten folgende Ungleichungen:
* i.) $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$
* ii.) $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$

**Korollar:**
$\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$ sind normierte Räume bezüglich aller Normen $||x||_p$ für $1 \leq p \leq \infty$. $C[a,b]$ ist ein normierter Raum bezüglich $||f||_p$ für alle $p \in [1, \infty)$.

**Beweis :** i.) und ii.) werden analog bewiesen, daher hier nur Beweis von ii.):

$||f+g||_p^p = [\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx] = \int_a^b |f(x)+g(x)|h(x)dx$ mit $h(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}$ Anwendung der Hölderungleichung ergibt:

$||f+g||_p^p = \int_a^b |f(x)|h(x)dx + \int_a^b |g(x)|h(x)dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} [\int_a^b h(x)^q]^{\frac{1}{q}} + [\int_a^b |g(x)|^p]^{\frac{1}{p}} [\int_a^b h(x)^q]^{\frac{1}{q}}$

$$\implies ||f+g||_p^p \leq (||f||_p + ||g||_p) \underbrace{[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}}_{\equiv ||f+g||_p^{\frac{p}{q}}}, \quad (p-1)q = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}} = p$$

$$\implies \frac{||f+g||_p^p}{||f+g||_p^{\frac{p}{q}}} = ||f+g||_p^{p(1-\frac{1}{q})} = ||f+g||_p \leq (||f||_p + ||g||_p)$$

□

**Bemerkung:**
$||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$ finden häufig Anwendung in der Approximationstheorie. Einfachster Fall: Annäherung gegebener Datenpaare $(t_j, y_j)$ für $j = 1$ durch eine Gerade:
$y(t) = x_1 + x_2 t$

**Approximation im Sinne von kleinsten Qudraten** (Least Squares):
$\min\limits_{x_1,x_2} \sum\limits_{j=1}^m |x_1 + x_2 t_j - y_j|^2 = ||(x_1 + x_2 t_j - y_j)_{j=1}^m||_2^2$
Vorteil: Optimierungsproblem ist qudratisch in $x_1, x_2$ und deswegen leicht lösbar.
Nachteil:
1.: Optimale $x_1, x_2$ ändern sich wenn der Datenpunkt wiederholt wird.
2.: Starke Abhänigkeit von Outlayern (Ausrastern), wie z.B. durch Mess- oder Übertragungsfehler $|y_j - (x_1 + x_2 t_j)| >> 1$

**Alternativen:** (Tschebyschow)Approximation:
$\min ||(y_j - (x_1 + x_2 t_j)||_\infty$ vermeidet das Widerholungsproblem. $L_1$-Approximation:
$\min ||y_j - (x_1 + x_2 t_j)||_1$ ist völlig unabhängig von Outlayern.

**Kompromisse:**
$\min ||y_j - (x_1 + x_2 t_j)||_p^p$ für geeignetes $1 < p < x$. Vorteil: Für $1 < p < \infty$ ist die Norm $||x||_p$ differenzierbar bezüglich $x$.

**Lemma 26.7:** lp-Räume sind normiert
Für $p \in [1, \infty)$ bilden die Folgen $(u_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ mit endlichem $||u||_p \equiv (\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ normierte Räume bezüglich der Norm $||u||_p$. Sie werden mit $l_p$ als Folgenräume über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dasselbe gilt für $l_\infty$, dass heißt $p = \infty$ und $||u||_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{|u_k|\} < \infty$.
Mit anderen Worten: $l_\infty$ besteht genau aus den beschränkten Folgen aus $\mathbb{C}$ oder$\mathbb{R}$.
**Beweis :**

Homogenität, Definitheit und Dreiecksungleichung im Falle $p = \infty$ folgen unmittelbar aus der Definition wie wie für $\mathbb{C}^n$ mit $n < \infty$. Annahme für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung verletzt, dass heißt: $\infty > ||u||_p + ||v||_p < ||u+v||_p \in (0, \infty[$, wobei $||u+v||_p = \infty$ zunächst erlaubt ist. Aus der Annahme und monotonem Wachstum des Ausdrcks $(\sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ bezüglich $n$ folgt, dass bereits für ein endliches $n$ gilt:
$(\sum\limits_{k=1}^n |u_k + v_k|^p)^{\frac{1}{p}} > ||u||_p + ||v||_p \geq (\sum\limits_{k=1}^n |u_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_{k=1}^n |v_k|^p)^{\frac{1}{p}} \implies$ Widerspruch zur Minkowski-Ungleichung. Die Annahme ist also falsch.

□

**Frage:**
Welche Beziehung besteht zwischen $p$-Normen in $\mathbb{C}^n$ beziehungsweise $l_\infty$, dass heißt Raum der beschränkten Funktionen.
Antwort:
Die Normen $||\cdot||_p$ sind als Funktion von $p \in [1,\infty)$ monoton fallend gegen den Grenzwert $||\cdot||_\infty$.
In $\mathbb{C}^n$ gilt:
$||x||_1 \geq ||x||_p \geq ||x||_\infty \geq \frac{||x||_1}{n}$

**Beweis :** Monotonie wird in der Übung bewiesen. Letzte Abschätzung:
$||x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \geq \max\limits_{1\leq j\leq n}\{|x_j|\} = ||x||_\infty, ||x||_p = (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq [n \max\{|x_j|\}^p]^{\frac{1}{p}} \leq ||x||_\infty n^{\frac{1}{p}}$

□

**Definition 26.8:** Äquivalenz von Normen

Allgemein heißen zwei Normen $||x||$ und $|||x|||$ auf einem Vektorraum $X$ äquivalent, wenn es Konstanten $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ gibt, so dass:
$c_1 \leq \frac{|||x|||}{||x||} \leq c_2$ für alle $x \in X$.
Mit anderen Worten: $0 < \int\limits_{0\neq x\in X} \frac{|||x|||}{||x||} \leq \sup\limits_{0\neq x\in X} \frac{|||x|||}{||x||} < \infty$

**Satz 26.9:** Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Raum
Auf $\mathbb{C}^n$ und allen endlich-dimensionalen Räumen ist jedes beliebiges Paar von Normen äquivalent im obigen "topologischen "Sinne.

**Beweis :**

Wegen der Transitivität der Äquivalenzrelationen, können wir o.B.d.A. annehmen:
$||\cdot|| = ||\cdot||_2$. Mit Basisvektoren (Cartesischen) $e_j = (0,\ldots \underbrace{,1,}_{\text{i-te Stelle}} \ldots,0) \in \mathbb{C}^n$ folgt aus der Normeigenschaft von $|||\cdot|||$:
$|||x||| = |||\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j||| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |||x_j e_j||| = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|\ |||e_j||| \leq (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} |||e_j|||^2)^{\frac{1}{2}}}_{\equiv c_2} \implies |||x||| \leq$

$c_2||x||_2$
Annahme: $0 = \inf\limits_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{|||x|||}{||x||} = \lim\limits_{k\implies\infty} \frac{|||x^{(k)}|||}{||x^{(k)}||} = \lim\limits_{k\implies\infty} |||\frac{x^{(k)}}{||x^{(k)}||}||| = \lim\limits_{k\implies\infty} ||\tilde{x}^{(k)}||$ mit $\tilde{x}^{(k)}$ Folge aus der Kugel $B_1 \equiv \{x \in \mathbb{C}^n \equiv ||x|| = 1\}$
Nach Bolzano-Weierstrass (Satz 13.4) hat die beschränkte Folge $\tilde{x}^{(k)}$ eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. sich selbst. Es gilt also:
$x^* = \lim\limits_{k\implies\infty} \tilde{x}^{(k)}$ mit $||x^*|| = \lim\limits_{k\implies\infty} ||\tilde{x}^{(k)}|| = 1 \implies x^* \neq 0$
Für $|||\cdot|||$ folgt, dass:
$|||\tilde{x}^{(k)} - x^{(o)}||| \leq c_2||\tilde{x}^{(k)} - x^{(o)}||_2 \xrightarrow{k\implies\infty} 0$und somit $\lim\limits_{k\implies\infty} |||\tilde{x}^{(k)} - x^{(o)} + x^*||| = |||x^{(o)}||| \neq 0$
wegen Definitheit von $|||\cdot||| \Leftrightarrow \lim\limits_{k\implies\infty} \frac{|||\tilde{x}^{(k)}|||}{||\tilde{x}^{(k)}||} = \lim\limits_{k\implies\infty} \frac{|||x^{(k)}|||}{||x^{(k)}||} \lim\limits_{k\implies\infty} \frac{|||x^{(o)}|||}{||x^{(o)}||} \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme

□

**Bemerkung:**
Es läßt sich sogar zeigen, dass diese Eigenschaft nämlich die Äquivalenz aller Normen die endlich-dimensionalen Vektorräume genau charakterisieren, dass heißt lineare Raum $X$ ist genau dann

endlich dimensional, wenn auf ihm alle Normen äquivalent sind.

**Gegebeispiel:**

$l_2$, dass heißt die Menge der quadratisch summierbaren folgen gilt für $x^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} e_j = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$:
$\frac{||x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k)}||_2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k \Longrightarrow \infty} 0$

**Zusammenfassung:** Konvergenz und Vollständigkeit, Beschränktheit konvergenter Folgen, Vollständigkeit metrischer Räume, Metrik von Produkträumen, Präkompaktheit, Vollständigkeit der lp-Räume.

## §27 : Konvergenz und Vollständigkeit

**Definition 27.1:**
Definition und Lemma:
Beschränktheit konvergenter Folgen, Vollständigkeit metrischer Räume, Präkompaktheit.

* i.) Für eine beliebige Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$, $X$ metrischer Raum, impliziert Konvergenz gegen ein $x_* \in X$, dass heißt:
$\lim\limits_{k \Longrightarrow \infty} d(x_k, x_*) = 0$, dass Cauchy-Kriterium/-Eigenschaft der Folge, dass heißt:
$\forall \epsilon > 0 \exists k_0(\epsilon) : d(x_k, x_m) < \epsilon$ falls $k \geq k_0 \leq m$, was wiederum Beschränktheit verlangt, dass heißt: $\sup\limits_k d(x_k, x_0) < \infty$ fur ein $x_0 \in X$.

* ii.) Der Raum $X$ heißt vollständiger metrischer Raum, wenn umgekehrt aus der Cauchy-Eigenschaft Konvergenz folgt, dass heißt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in $X$ besitzt. Vollständige normierte Räume heißen Banachräume, vollständige Skalar-Produkt-Räume heißten Hilbert-Räume.

* iii.) Falls sich aus Beschränktheit einer Folge schon Konvergenz einer Teilfolge ergibt, heißt der metrische Raum präkompakt.

**Beweis :**
Die Implikation in i.) folgen genau wie im $\mathbb{R}^n$.

□

**Bemerkung:**
Die Eigenschaften Konvergenz, Cauchy, Beschränktheit einer Folge und Vollständigkeit sowie Präkompaktheit eines Raumes $X$ sind äquivalent für zwei Metriken $d$ und $\tilde{d}$ auf $X$, wenn: ::0 $< \inf\limits_{x,y \in X, x \neq y} \frac{\tilde{d}(x,y)}{d(x,y)} \leq \sup\limits_{x,y \in X, x \neq y} \frac{\tilde{d}(x,y)}{d(x,y)} < \infty$

Dieser Äquivalenzbegriff kann abgeschwächt werden, was aber im Falle von $d(x, y) = ||x - y||$ keinen Unterschied macht.

**Definition 27.2:** Metrik von Produkträumen
Für $(X_i, d_i)$ metrische Räume mit $i = 1, \ldots, n$ bildet das kartesische Produkt $X = \otimes_{i=1,\ldots,n} X_i$, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ bezüglich der Metrik:
$d[\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\in X}, (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)] \equiv \max\limits_{1 \leq i \leq n <} (d(x_i, \tilde{x}_i))$ auch ein metrischer Raum. Zudem ist $X$

vollständig $\Leftrightarrow$alle $X_i$ vollständig sind.

**Beweis :**
O.B.d.A. $n = 2$, Rest durch Induktion. $X_1 = Y, X_2 = Z$: Definitheit und Dreiecksungleichung elementar überprüfbar, Aussagen über Vollständigkeit zu beweisen: $X = Y \times Z$ volständig $\Leftrightarrow Y, Z$ vollständig:
* „ $\Longrightarrow$ “ Betrachte die Cauchyfolge $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset Y \implies d_y(y_k, y_j) \leq \epsilon$ fur $k, j \geq k_0(\epsilon)$
$\Longrightarrow (y_k, z_0) \in X$ für ein beliebiges konstantes $z_0 \in Z$ mit $d[(y_k, z_0), (y_j, z_0)] = \max(d_Y(y_k, y_j), d_Z(z_0, z_0) = d_Y(y_k, y_j)$
$\Longrightarrow (y_k, z_0)$ sind Cauchyfolgen in $X$ und haben Grenzwert $(y_*, z_*) \in Y \times Z$
$d[(y_k, z_0), (y_*, z_*)] = \max[d_Y(y_k, y_*), \underbrace{d_Z(z_*, z_0)]}_{\Longrightarrow 0} \xrightarrow{k \Longrightarrow \infty} 0 \implies d_Z(z_*, z_0) = 0 \implies z_* = z_0$ und $d_Y(y_k, y_*) \xrightarrow{k \Longrightarrow \infty} 0 \implies y_* = \lim\limits_{k \Longrightarrow \infty} y_k$ wie behauptet.
* „ $\Longleftarrow$ “ Betrachte Cauchyfolge $(y_k z_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$
$\Longrightarrow d[(y_k, z_k), (y_j, z_j)] = \max[d_Y(y_k, y_j), d_Z(z_k, z_j)] \leq \epsilon$ fur $k, j \geq k_0(\epsilon)$
$d_Y(y_k, y_j) \leq \epsilon \geq d_Z(z_k, z_j) \implies (y_k)_{k=1}^{\infty} \subset Y$ und $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset Z$ sind Cauchyfolgen mit Grenzwert $(y_*, z_*) \implies d[(y_k, z_k), (y_*, z_*)] \xrightarrow{k \Longrightarrow \infty} 0$ wie behauptet.

□

**Schlussfolgerung/Bestätigung:**
$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{\text{n-mal}}$ und $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{n-mal}}$ sind als endliche Produkte der vollständigen metrischen Räume $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ auch vollständig und zwar bezüglich aller Normen.

**Satz 27.3:** Vollständigkeit der lp-Räume
Für $p \in [1, \infty]$ sind die Folgenräume $l_p$ über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ vollständig, dass heißt Banachräume für $p \neq 2$ und Hilberträume im Falle $p = 2$.

**Beweis :**
Betrachte (für $p < \infty$) Cauchy-Folge $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset l_p(\mathbb{C}, x^{(k)} = (x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C})$:
$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 : ||x^{(k)} - x^{(m)}||_p^p = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|^p < \epsilon^p$ fur $k, m \geq k_0$
Da für jedes $j \in \mathbb{N} : |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| \leq ||x^{(k)} - x^{(m)}||_p < \epsilon$, sind die Komponenten-Folgen $(x_j^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ auch Cauchy und haben Grenzwert $x_j^{(*)}$. Für $x^{(m)} = (x_j^{(*)})_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist noch zu zeigen, dass es zu $l_p$ gehört und der Grenzwert der $x^{(k)}$ bezüglich $||\cdot||_p$ ist. Für festes $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Projektion $P_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \implies \mathbb{C}^n$ mit $P_n((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (x_j)_{j=1}^{n}$:
$||P_n(x^{(k)}) - P_n(x^{(m)})||_p^p = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|^p \leq \epsilon$
Grenze für $m \implies \infty$ aber $n$ fest ergibt: $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(*)}|^p \leq \epsilon$
Nun lassen wir auch $n \implies \infty$ gehen und erhalten:
$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j^{(*)}|^p = ||x^{(k)} - x^{(*)}||_p^p < \epsilon \implies ||x^{(*)}||_p^p \leq ||x^{(*)}||_p^p + \epsilon < \infty$ so dass $x^{(*)} \in l_p(\mathbb{C})$ und $\lim\limits_{k \Longrightarrow \infty} ||x^{(k)} - x^{(*)}|| = 0$, da $\epsilon$ beliebig klein gewählt werden kann.
Der Fall $p = \infty$ als Übung.

□

**Gegenbeispiel:**

Während $\mathcal{C}[a,b]$ bezüglich $||\cdot||_\infty$ abgeschlossen und damit Banachraum ist (da Konvergenz bezüglich $||\cdot||_\infty$ gleichmäßig ist und Stetigkeit der Grenzfunktion sicherstellt) gibt es in $\mathcal{C}[a,b]$ Cauchy-Folgen bezüglich $||\cdot||_p$ für $p<\infty$, die unstetig sind oder sogar unbeschränkt wachsen:
$f_k(x)=x^k:[0,1]\implies[0,1]\implies||f_k-0||_p^p=\int_0^1 x^{kp}dx=\frac{x^{1-kp}}{-kp}|_0^1=\frac{1}{kp}\xrightarrow{k\implies\infty}0$
$\lim\limits_{k\implies\infty}||f_k-0||_p=0$
Mit anderen Worten: $f_k$ konvergieren bezüglich $||\cdot||_p$ gegen die stetige Nullfunktion, die aber nicht ihr punktweiser Grenzwert ist.

**Zweite-Cauchy-Folge:** $f_k(x)=\min(k,-\ln(x))$. Für $m<k$:
$||f_k-f_m||=\int_{m^p}^{k^p}e^{-\sqrt[p]{y}}dy\le\int_{m^p}^{\infty}\frac{n!}{y^{\frac{n}{p}}}dy=\frac{y^{-\frac{n}{p}}}{-\frac{n}{p}}|_{m^p}^{\infty}=\frac{m^{p-n}}{\frac{n}{p}}\xrightarrow{m\implies\infty}f(x)=\begin{cases}-\ln(x)\text{ fur }0<x\le1\\ ?\text{ fur }x=0\end{cases}$
da Umkehrfunktion von $y=-(\ln(x))^p$ ist $x=e^{-\sqrt[p]{y}}$ Für alle $n$ gilt $e^z\ge\frac{z^n}{n!}$ für $z\ge0\implies e^{-z}\le\frac{n!}{z^n}\implies e^{-\sqrt[p]{y}}\le\frac{n!}{y^{\frac{n}{p}}}$ wegen Potenzreihendarstellung.

Die $f_k$ bilden Cauchy-Folge bezüglich aller Normen $||\cdot||_p$ mit $p<\infty$. Also muss die unbeschränkte Funktion zur Vervollständigung von $[0,1]$ bezüglich $||\cdot||_p$ mit $p<\infty$ eingeschlossen werden.

**Zusammenfassung:**
dichte Räume, Separabilität, offene und abgeschlossene Mengen im metrischen Raum, Schnitte und Vereinigung offener/abgeschlossener Mengen, Konvergenz und offene/abgeschlossene Mengen, Stetigkeit von Funktionen (Abbildungen) und Kompaktheit von Teilmengen, Stetigkeit mittels Umgebungen

**Definition 27.4:** dichte Räume, Separabilität
Eine Menge $D\subset X$ in einem metrischen Raum "ist"oder "liegt"dicht in $X$, falls jedes Element $x\in X$ Grenzwert einer Folge aus $D$ ist.
Man sagt dann auch $X$ ist der Abschluss oder die Vervollständigung von $D$.
Gibt es ein solches "erzeugendes"System $D$, das abzählbar ist, so nennt man $X$ separabel.

**Bemerkung:**
In normierten Räumen $X$ heißt eine Folge $B\equiv(b_j)_{j=1}^\infty\subset X$ eine Schauder-Basis, wenn es zu jedem $x\in X$ eine Folge $(c_j)_{j=1}^\infty\subset\mathbb{K}$ gibt, so dass die Reihe $x=\sum_{j=1}^\infty c_jb_j$ konvergiert. In gewisser Weise wird damit der Raum $X$ mit der Koeffizientenfolge identifiziert.
Da $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ und $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ Abschluss der abzählbaren Körper $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ beziehungsweise $\mathbb{Q}$ sind, ist jeder normierte Raum mit einer Schauderbases separabel. Allerdings gibt es separable Banachräume, die (im Gegensatz zu einer Vermutung von Banach) keine Schauderbasis besitzen. Alle separablen Hilberträume besitzen Schauderbasen und sind zu $l_2$ isomorph über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $\implies$ Allgemeine Schlussfolgerung: Banachräume sind wesentlich komplexer als Hilberträume. Der Raum $B[0,1]$ der beschränkten Funktionen mit Norm $||\cdot||_\infty$ ist nicht separabel, da die Menge der charakteristischen Funktionen:
$\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1\text{ falls }a\le x\le b\\ 0\text{ sonst}\end{cases}$ ist überabzählbar für $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ und es gilt für jedes Paar:
$||\chi_{[a,b]}-\chi_{[\tilde{a},\tilde{b}]}||_\infty=1$ falls $a\ne\tilde{a}\vee b\ne\tilde{b}$.

**Definition 27.5:** offene und abgeschlossene Mengen im metrischen Raum $X$
* i. Zu $x_0\in X$ heißt für $r>0$ die Menge $B_r(x_0):=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$ und $\overline{B}_r(x_0):=\{x\in X:d(x,x_0)\le r\}$ die offene Kugel mit Radius $r$ um $x_0$ und die entsprechende abgeschlossene Kugel.
* ii. $U\subset X$ heißt Umgebung von $x_0$, falls $\mathcal{B}_r(x_0)\subset U$ für ein $r>0$.
* iii. $U$ heißt offen, falls es Umgebung aller seiner Elemente $x\in U$ ist.
* iv $U\subset X$ heißt abgeschlossen in $X$, genau dann wenn $U^C=X\backslash U\equiv\{x\in X:x\notin U\}$ offen ist.

**Lemma 27.6:** Schnitte und Vereinigung offener/abgeschlossener Mengen
* i.) $\emptyset$ und $X$ sind sowohl offen wie abgeschlossen.
* ii.) Endliche Schnitte und endliche oder unendliche Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.
* iii.) Endliche Vereinigunen und endliche Schnitte abgeschlossener Mengen sind auch abgeschlossen.

**Beweis :**

* i.) Da über die Elemente der leeren Menge alle denkbaren Aussagen trivialerweise zutreffen, ist die leere Menge sicher offen und damit $X = \emptyset^C$ abgeschlossen. $X$ ist offen, da alle Kugeln $\mathcal{B}_r(x)$ für $x \in X$ definitionsgemäss Teilmenge von $X$ sind.
* ii.) Betrachte $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ mit $U_i \subset X$ offen.
$\implies$ $x_0 \in U_i$ für alle $i$ $\implies$ $B_{r_i}(x_0) \subset U_i$ für Radius $r_i > 0$. $\implies$ $x_0 \in \mathcal{B}_r(x_0) \subset U$ für $r = \min(r_1, \dots r_n) > 0$. $r$ ist nicht 0 wegen $n < \infty$ $\implies$ Endlicher Schnitt offen.Betrachte $x_0 \in \bigcup_{j\in J} U_j$ mit beliebigen Indexmengen $J$. Es existiert mindestens ein $j \in J$, so dass $x_0 \in U_j$. Wegen Offenheit von $U_j$ existiert $\mathcal{B}_r(x_0) \subset U_j$, die auch zur Vereinigung $\bigcup_{j\in J} U_j$ gehören muss.
$\implies$ Endliche oder unendliche Vereinigung offen.
* iii.) folgt mittels Komplementarität.

$\square$

**Bemerkung:**
Die in Lemma 27.6 aufgestelten Eigenschaften der Systeme offener und abgeschlossener Mengen lassen sich benutzen, um sogenannte Topologien auf $X$, dass heißt Nachbarschaftskonzept ohne Bezug auf eine Metrik $d$ zu definieren. Daraus ergibt sich das Konzept des topologischen Raumes als Verallgemeinerung metrischer Räume. Konvergenz kann wie folgt definiert werden:

**Lemma 27.7:** Konvergenz und offene/abgeschlossene Mengen
Im metrischen Raum $X$ gilt:
* i.) $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$ konvergiert gegen $x \in X \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen $U \ni x$ existiert $k_0$, so dass $x_k \in U$ für $k \geq k_0$.
* ii.) Eine Menge $M \subset X$ ist abgeschlossen genau dann wenn aus $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M$ mit $\lim\limits_{k \implies \infty} x_k = x_*$ folgt, dass $x_* \in M$.

**Beweis :**
* i.) („ $\implies$ “) Für gegebenes $U$ existiert $\mathcal{B}_r(x) \subset U$. Wegen Konvergenz $x_k \implies x$ existiert $k_0$ so, dass $d(x_k, x) < r$ für $k \geq k_0$. Daraus folgt $x_k \in \mathcal{B}_r(x_0) \subset U$ für $k \geq k_0$ wie behauptet.
(„ $\impliedby$ “) Folgt unmittelbar für die speziellen Umgebungen $U \equiv \mathcal{B}_r(x)$.
* ii.) („ $\implies$ “) per Widerspruch. Annahme: $x_* \notin M \Leftrightarrow x_* \in M^C$ offen. Also existiert $\mathcal{B}_r(x_*) \subset M^C \implies d(x, x_*) \geq r \forall x \in M \implies \inf d(x_k, x_*) > 0 \implies$ Widerspruch zur vorausgesetzten Konvergenz.
(„ $\impliedby$ “) Angenommen $M$ nicht abgeschlossen $\implies$ $M^C$ ist nicht offen $\implies$ $\exists x_* \in M^C$ mit $\mathcal{B}_r(x_*) \not\subset M^C \forall r > 0 \implies \forall r = \frac{1}{k} \exists x_k \in \mathcal{B}_r(x_*) \cap M \implies \lim\limits_{k \implies \infty} x_k = x_* \in M^C$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

$\square$