Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. E. L. Wirl; Dipl.-Math. D. Skodlerack

Übungsaufgaben zur Analysis II* (SS 09)
Serie 11

Besprechung ab 13. Juli 2009 (in den Übungen)

Aufgabe 11.1:

Es sei der $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-euklidischen Skalarprodukt ausgestattet und $B(0,1)$ die Kugel bzgl. der zugehörigen euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : B(0,1) \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

in einer Umgebung eines jeden Punktes $x \in B(0,1)$ eine inverse Funktion besitzen muss. Zeigen Sie zusätzlich, dass f surjektiv ist und dass es eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte differenzierbare inverse Funktion gibt, d.h. dass f ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 11.2:

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x(1-y),\, xy)$ auf lokale Invertierbarkeit, d.h. bestimmen Sie alle diejenigen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, zu denen es eine Umgebung U gibt, so dass die Einschränkung $f_{|U}$ eine inverse Funktion besitzt.

Aufgabe 11.3:

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Ansatz die Minima von

a) $x + 2y$ unter der Bedingung $4x^2 + y^4 = 5$;

b) xy^2 unter der Bedingung $x^2 + y^2 = 1$;

c) xz unter den Bedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + z = -1$.

Aufgabe 11.4:

Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem zweischaligen Hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ und der Geraden, die die Punkte $P(-1,0,-1)$ und $Q(1,1,1)$ enthält.

Wie ändert sich der Minimalabstand unter kleinen Änderungen des Punktes Q?

Bitte wenden.

Aufgabe 11.5:

Als ein Gegenbeispiel zum Satz von Schwarz sei die Funktion

$$f(x) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

zu betrachten.

a) Weisen Sie nach, dass diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist. (Stellen Sie sie in Polarkoordinaten dar.)

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ und untersuchen Sie deren Stetigkeit.

c) Betrachten Sie die Funktionen $x \mapsto \partial_y f(x, 0)$ und $y \mapsto \partial_x f(0, y)$, untersuchen Sie deren Differenzierbarkeit im Nullpunkt und bestimmen Sie aus ihnen $\partial_x \partial_y f(0, 0)$ bzw. $\partial_y \partial_x f(0, 0)$ und vergleichen Sie deren Werte.

d) Begründen Sie, welche der Voraussetzungen des Satz von Schwarz nicht erfüllt sind.