Zur Lösung der Aufgaben 8.2 und 10.5

1 Aufgabe 8.2

Es ist der Banachsche Fixpunktsatz auf die Funktion

$$F : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}{x_2}^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}{x_1}^2 - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

anzuwenden. Als Norm ist die Maximumsnorm gewählt. Dann ergibt sich bei $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$

$$\|F(x)\|_\infty \leq \max\left(\tfrac{1}{3}{\|x\|_\infty}^2 + \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4}{\|x\|_\infty}^2 + \tfrac{2}{3}\right) \leq \tfrac{11}{12} < 1$$

Daher wird durch F das Quadrat $M = [-1,1]^2$ auf sich selbst abgebildet. Als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist M auch vollständig. Es bleibt die Kontraktivität zu prüfen. Dies kann man direkt über die Definition der Lipschitz-Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_\infty &= \max\left(\tfrac{1}{3}\left({x_2}^2 - {y_2}^2\right),\ \tfrac{1}{4}\left({x_1}^2 - {y_1}^2\right)\right) \\ &\leq \tfrac{1}{3}\|x-y\|_\infty \left(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty\right) \leq \tfrac{2}{3}\|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

Daraus folgt die Kontraktionskonstante $\lambda = \frac{2}{3} < 1$ und die Abstandssschätzungen zum Fixpunkt

$$\|x_k - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{1-\lambda}\|x_{k+1} - x_k\|_\infty = 3\,\|x_{k+1} - x_k\|_\infty, \qquad \|x_{k+1} - x^*\|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\|x_{k+1} - x_k\|_\infty = 2\,\|x_{k+1} - x_k\|_\infty\,.$$

Damit ergibt sich für die ersten 8 Iterierten und deren Abstand zum Fixpunkt die folgende Tabelle:

k	x_k	$x_{k+1} = F(x_k)$	$\|x_k - x^*\| \leq$	$\|x_{k+1} - x^*\| \leq$
0	$(0.00000, 0.00000)$	$(0.50000, -0.66667)$	2.00000	1.33333
1	$(0.50000, -0.66667)$	$(0.64815, -0.60417)$	0.44444	0.29630
2	$(0.64815, -0.60417)$	$(0.62167, -0.56164)$	0.12757	0.08505
3	$(0.62167, -0.56164)$	$(0.60515, -0.57005)$	0.04957	0.03305
4	$(0.60515, -0.57005)$	$(0.60832, -0.57512)$	0.01520	0.01014
5	$(0.60832, -0.57512)$	$(0.61025, -0.57415)$	0.00580	0.00387
6	$(0.61025, -0.57415)$	$(0.60988, -0.57356)$	0.00177	0.00118
7	$(0.60988, -0.57356)$	$(0.60966, -0.57368)$	0.00068	0.00045
8	$(0.60966, -0.57368)$	$(0.60970, -0.57375)$	0.00021	0.00014

Diese Tabelle wurde mit dem C-Programm aus Abbildung 1 erzeugt.

2 Aufgabe 10.5

Das Fixpunktproblem ist nun in ein Gleichungssystem umzuwandeln und mittels des Newton-Verfahrens zu lösen. Weiter ist die Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes zu verwenden, um die Qualität der Approximationen einzuschätzen.

Das Gleichungssystem $G(x) = 0$ hat die Gleichungen

$$G : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \quad G(x) = G(x_1, x_2) = x - F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3}{x_2}^2 - \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{1}{4}{x_1}^2 + \frac{2}{3} \end{pmatrix}\,.$$

`8_2.c`, zu übersetzen mit `gcc -lm 8_2.c -o 8_2`

```c
#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main(){
        double x1=0, x2=0;

        int k;
        /* Tabellenkopf */

        puts("\n\\[\n\t\\begin{array}{|r|r|r|r|r|}\\hline");
        puts("\tk & x_k &x_{k+1}=F(x_k) &");
        puts("\t\t\\|x_k-x^*\\|\\le{} &\\|x_{k+1}-x^*\\|\\le{}\\\\ \\hline");

        for(k=0; k<9; k++){
        /* F auswerten */
                double  F1=x2*x2/3+1.0/2,
                        F2=x1*x1/4-2.0/3;

        /* Abstandsschätzung */
                double dist = fmax(fabs(F1-x1), fabs(F2-x2));
        /* Tabellenzeile */
                printf("\t %3u & (%8.5f, %8.5f)& (%8.5f, %8.5f) &",
                        k,x1,x2,F1,F2);
                printf(" %8.5f & %8.5f \\\\\n", 3*dist, 2*dist);

        /* Durchführung der Rekursion */
                x1=F1; x2=F2;
        }

        /* Tabellenfuss */
        puts("\t\\hline\n\t\\end{array}\n\\]");

        return 0;
}
```

Abbildung 1: C-Code zu Aufgabe 8.2

Die Jacobi-Matrix ist

$$\nabla G(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für die Bestimmung der Inversen kommt die Merkregel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \nabla G(x)^{-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}x_1x_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

zum Einsatz. Der Abstand zum Fixpunkt kann nun nicht aus den Iterierten des Newton-Verfahrens gewonnen werden, sondern muss mit der Iterationsfunktion F bestimmt werden, also

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{1}{1-\lambda}\|x_k - F(x_k)\| = 3\,\|G(x_k)\|$$

Es ergibt sich damit folgende Tabelle aus Iterationspunkten und Abschätzungen:

k	x_k	$G(x_k)$		$\|x_k - x^*\| \le$
0	$(0.00000, 0.00000)$	$(-0.5,$	$0.66667)$	2
1	$(0.50000, -0.66667)$	$(-0.14815,$	$-0.0625)$	0.44444
2	$(0.60833, -0.57708)$	$(-0.0026751,$	$-0.002934)$	0.0088021
3	$(0.60972, -0.57373)$	$(-3.7522e-06,$	$-4.7906e-07)$	$1.1257e-05$
4	$(0.60972, -0.57373)$	$(-7.0421e-13,$	$-2.5541e-12)$	$7.6622e-12$
5	$(0.60972, -0.57373)$	$(-1.1102e-16,$	$0)$	$3.3307e-16$
6	$(0.60972, -0.57373)$	$(0,$	$0)$	0
7	$(0.60972, -0.57373)$	$(0,$	$0)$	0
8	$(0.60972, -0.57373)$	$(0,$	$0)$	0

Diese Tabelle wurde mit dem C-Programm aus Abbildung 2 erzeugt.

`10_5.c`, zu übersetzen mit `gcc -lm 10_5.c -o 10_5`

```c
#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main(){
        double x1=0, x2=0;

        int k;
        /* Tabellenkopf */

        puts("\n\\[\n\t\\begin{array}{|r|r|rr|r|}\\hline");
        puts("\tk & x_k & G(x_k)& & ");
        puts("\t\t\\|x_k-x^*\\|\\le{} \\\\ \\hline");

        for(k=0; k<9; k++){
        /* F auswerten */
                double  F1=x2*x2/3+1.0/2,
                        F2=x1*x1/4-2.0/3;

                double G1=x1-F1, G2=x2-F2;
                double det = 1-x1*x2/3;

                double  s1=-(G1+2*x2/3*G2)/det,
                        s2=-(G2+   x1/2*G1)/det;

        /* Abstandsschätzung */
                double dist = fmax(fabs(G1), fabs(G2));
        /* Tabellenzeile */
                printf("\t %3u &  (%8.5f, %8.5f) & (%8.5g,& %8.5g) & ",
                        k,x1,x2,G1,G2);
                printf(" %8.5g \\\\\n", 3*dist);

        /* Durchführung der Rekursion */
                x1+=s1; x2+=s2;
        }

        /* Tabellenfuss */
        puts("\t\\hline\n\t\\end{array}\n\\]");

        return 0;
}
```

Abbildung 2: C-Code zu Aufgabe 10.5