HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. J. HEERDA

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Diskussion zu Aufgabe 1.3

Aufgabe 1.2:

Finden Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x\frac{1-ax^2}{1+bx^2}$

a) in $x = 0$ bis zur 5. Ableitung bzw.

b) in $x = 0$ und $x = \pm\frac{\pi}{2}$ bis zur ersten Ableitung

übereinstimmen.

Lemma 2.1. *Seien $F, G, H \in C^k(\mathbb{R})$ k-fach stetig differenzierbare Funktionen. Sei vorausgesetzt, dass F und G in einem Punkt x_0 bis zur k-ten Ableitung übereinstimmen,*

$$F(x_0) = G(x_0) \text{ und } F^{(j)}(x_0) = G^{(j)}(x_0) \text{ für alle } j = 1, 2, \ldots, k\ .$$

Dann stimmen auch die Produktfunktionen (FH) und (GH) in x_0 bis zur k-ten Ableitung überein.

Beweis: Nach der verallgemeinerten Leibnizregel bestimmen sich die höheren Ableitungen eines Produktes mittels der Binomialkoeffizienten als

$$\begin{aligned}(FH)^{(m)}(x_0) &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} F^{(j)}(x_0)\, H^{(m-j)}(x_0) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} G^{(j)}(x_0)\, H^{(m-j)}(x_0) \\ &= (GH)^{(m)}(x_0)\ .\end{aligned}$$

#

Für die Lösung der Aufgabe wählt man Vielfaches der Funktionen mit einem gemeinsamen Faktor, so dass diese nennerfrei werden. Also $F(x) = (1+bx^2)\sin(x)$, $G(x) = x - ax^3$ und $H(x) = \frac{1}{1+bx^2}$. Werden die Konstanten a, b so gewählt, dass F und G in einem Stützpunkt x_0 in geforderter Ableitungsordnung übereinstimmen, so gilt das auch für $f = FH$ und $g = GH$.

Alternative Interpretation: Die Funktion $g = p/q$ ist ein Bruch zweier Polynome $p(x) = x - ax^3$ und $q(x) = 1 + bx^2$. Die Ableitung eines Bruches führt auf komplizierte Ausdrücke, was in den Ableitungen von $\frac{1}{q(x)}$ begründet liegt. Diese Ableitungen können systematisch vermieden bzw. implizit bestimmt werden, indem man die bruchfreie Gleichung $p(x) = g(x)q(x)$ betrachtet und ableitet. Dann gilt, wie oben nach der verallgemeinerten Leibnizregel, in jedem Punkt x

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} g^{(m-k)}(x) q^{(k)}(x)\ .$$

Da q zweiten Grades (und p dritten Grades) ist, kann der Index k in dieser Formel auf die Werte $\{0,1,2\}$ eingeschränkt werden. Aus der Folge der Identitäten

$$\begin{aligned}
p(x) &= g(x)q(x) \\
p'(x) &= g'(x)q(x)+g(x)q'(x) \\
p''(x) &= g''(x)q(x)+2g'(x)q'(x)+g(x)q''(x) \\
p'''(x) &= g'''(x)q(x)+3g''(x)q'(x)+3g'(x)q''(x) \\
0 &= g^{(m)}(x)q(x)+m\,g^{(m-1)}(x)q'(x)+\frac{m(m-1)}{2}\,g^{(m-2)}(x)q''(x) \qquad m=4,5,\dots
\end{aligned}$$

können nun nacheinander die Ableitungen von g gewonnen werden, indem jede Gleichung nach der höchsten Ableitung umgestellt wird und die schon bekannten niedrigeren Ableitungen eingesetzt werden.

Im Rahmen dieser Aufgabe kann man aber auch gleich die bekannten Ableitungen von f in den Stützpunkten anstelle der Ableitungen von g einsetzen. Die sich daraus ergebenden Ausdrücke sind dieselben wie im Lemma.

Systematische Interpretation: Die erweiterte Leibnizregel kann in eine Form umgeschrieben werden, in der sie der Multiplikationsregel für die Koeffizientenfolgen von Polynomen entspricht. Dazu werden die Bestandteile des Binomialkoeffizienten auf die restlichen Terme verteilt:

$$\frac{1}{m!}(FH)^{(m)}(x_0)=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}F^{(j)}(x_0)\cdot\frac{1}{(m-j)!}H^{(m-j)}(x_0)$$

Für die Taylorpolynome T_k^F, T_k^H, $T^{(FH)}$ der Ordnung k folgt dann daraus

$$T_k^F(x)\cdot T_k^H(x)=T_k^{(FH)}(x)+\text{ (Terme des Grades } (k+1) \text{ und höher)}$$

1.2a) (Padé–Approximation)

Wie angegeben werden die Hilfsfunktionen $F(x)=q(x)f(x)=(1+bx^2)\sin(x)$, $G(x)=p(x)=x-ax^3$ und $H(x)=\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{1+bx^2}$ betrachtet. Werden die Konstanten a,b so gewählt, dass F und G in $x_0=0$ in maximaler Ableitungsordnung übereinstimmen, so gilt das auch für $f=FH$ und $g=GH$.

Die Ableitungen und Werte in x_0 von F und G sind in Tabelle 1 aufgelistet. Aus der geforderten Gleichheit der dritten und fünften Ableitungen ergeben sich die Bedingungen $a+b=\frac{1}{6}$ und $b=\frac{1}{20}$, und daraus $a=\frac{7}{60}$. Die anderen Ableitungen bis zur 6. stimmen automatisch überein.

Eine alternative Berechnungsweise ergibt sich durch die direkte Rechnung mit den Taylorpolynomen, in diesem Fall des Sinus. Nicht berücksichtigte Terme der Ordnung 7 und höher werden in einem Sammelausdruck $O(x^7)$ zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
f(x)=g(x)+O(x^7) &\iff & x(1-ax^2) &= \left(1+bx^2\right)\left(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+O(x^7)\right)+O(x^7) \\
&\iff & x-ax^3 &= x+\left(b-\tfrac{1}{6}\right)x^3-\left(\tfrac{1}{6}b-\tfrac{1}{120}\right)x^5+O\left(x^7\right) \\
&\iff & b&=\tfrac{1}{20} \text{ und } a+b=\tfrac{1}{6} \\
&\iff & b&=\tfrac{1}{20} \text{ und } a=\tfrac{7}{60}
\end{aligned}$$

j	$F^{(j)}(x)$	$F^{(j)}(0)$	$G^{(j)}(x)$	$G^{(j)}(0)$
0	$(1+bx^2)\sin(x)$	0	$x-ax^3$	0
1	$2bx\sin(x)+(1+bx^2)\cos(x)$	1	$1-3ax^2$	1
2	$\binom{2}{2}2b\sin(x)+\binom{2}{1}2bx\cos(x)-\binom{2}{0}(1+bx^2)\sin(x)$	0	$-6ax$	0
3	$\binom{3}{2}2b\cos(x)-\binom{3}{1}2bx\sin(x)-\binom{3}{0}(1+bx^2)\cos(x)$	$6b-1$	$-6a$	$-6a$
4	$-\binom{4}{2}2b\sin(x)-\binom{4}{1}2bx\cos(x)+\binom{4}{0}(1+bx^2)\sin(x)$	0	0	0
5	$-\binom{5}{2}2b\cos(x)+\binom{5}{1}2bx\sin(x)+\binom{5}{0}(1+bx^2)\cos(x)$	$-20b+1$	0	0
6	$\binom{6}{2}2b\sin(x)+\binom{6}{1}2bx\cos(x)-\binom{6}{0}(1+bx^2)\sin(x)$	0	0	0
7	$\binom{7}{2}2b\cos(x)-\binom{7}{1}2bx\sin(x)-\binom{7}{0}(1+bx^2)\cos(x)$	$42b-1$	0	0

Tabelle 1: Die ersten 7 Ableitungen der Funktionen für Aufgabe 1.2a)

	$x=0$	$x=-\frac{\pi}{2}$	$x=+\frac{\pi}{2}$
$F(x) \quad =(1+bx^2)$	0	$-(1+b\frac{\pi^2}{4})$	$(1+b\frac{\pi^2}{4})$
$G(x) \quad =x-ax^3$	0	$-\frac{\pi}{2}+a\frac{\pi^3}{8}$	$\frac{\pi}{2}-a\frac{\pi^3}{8}$
$F'(x) \quad =2bx\sin(x)+(1+bx^2)\cos(x)$	1	$b\pi$	$b\pi$
$G'(x) \quad =1-3ax^2$	1	$1-3a\frac{\pi^2}{4}$	$1-3a\frac{\pi^2}{4}$

Tabelle 2: Funktionen, Ableitungen und deren Werte für Aufgabe 1.2b)

Eine ähnliche Berechnungsvorschrift ergibt sich, indem man den Nenner in eine geometrische Reihe entwickelt.

$$
\begin{aligned}
f(x)=g(x)+O(x^7) &\iff x(1-ax^2)\sum_{k=0}^{\infty}(-b)^k x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+O(x^7)\\
&\iff x-(a+b)x^3+b(a+b)x^5+O(x^7)=x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+O\left(x^7\right)\\
&\iff a+b=\tfrac{1}{6}\text{ und } b(a+b)=\tfrac{1}{120}\\
&\iff b=\tfrac{1}{20}\text{ und } a=\tfrac{7}{60}
\end{aligned}
$$

1.2b) (rationale Hermite–Interpolation)

Es werden wieder dieselben Funktionen F, G, H verwendet. Diesmal sind nur Funktionswerte und Ableitungen in den Punkten $0, \pm\frac{\pi}{2}$ abzugleichen. Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass die Ableitungsbedingungen im Punkt $x=0$ automatisch erfüllt sind und in den Punkten $x=\pm\pi$ sich identische Bedingungen ergeben. Diese Bedingungen ergeben folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} a\frac{\pi^3}{8}+b\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi}{2}-1 \\ 3a\frac{\pi^2}{4}+b\pi=1 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\pi^3}{8}a\\ \frac{\pi^2}{4}b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}-1\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix} \iff (-1)\begin{pmatrix}\frac{\pi^3}{8}a\\ \frac{\pi^2}{4}b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}-1\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

Hieraus ist die Lösung $a=\frac{4}{\pi^3}(4-\pi)$ und $b=\frac{4}{\pi^2}(\pi-3)$ erkennbar.

Berechnung mit Taylorreihen: Alternativ kann man auch in diesem Falle die Taylorreihen beider Funktionen vergleichen. Da die Bedingungen in $x_0=0$ automatisch erfüllt sind, müssen nur die Taylor-Entwicklungen für $x_0=\frac{\pi}{2}$ verglichen werden. Es gelten

$$f(\tfrac{\pi}{2}-h)=\cos(h)=1-\tfrac{1}{2}h^2\pm\cdots=1+O(h^2)$$

$$\text{und}\quad g(\tfrac{\pi}{2}-h)=(\tfrac{\pi}{2}-h)\,\frac{1-a(\frac{\pi}{2}-h)^2}{1+b(\frac{\pi}{2}-h)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\left(1-a\frac{\pi^2}{4}+a\pi h-ah^2\right)}{1+b\frac{\pi^2}{4}-b\pi h+bh^2}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}\left(1-a\frac{\pi^2}{4}\right)-\left(1-a\frac{3\pi^2}{4}\right)h+O(h^2)}{\left(1+b\frac{\pi^2}{4}\right)-b\pi\,h+O(h^2)}$$

Aus dem Vergleich beider Funktionen ergibt sich, dass im letzten Ausdruck für g Zähler und Nenner bis zur ersten Ordnung übereinstimmen müssen, woraus man wieder das oben angegebene lineare Gleichungssystem erhält.

1.3) Fehleruntersuchung

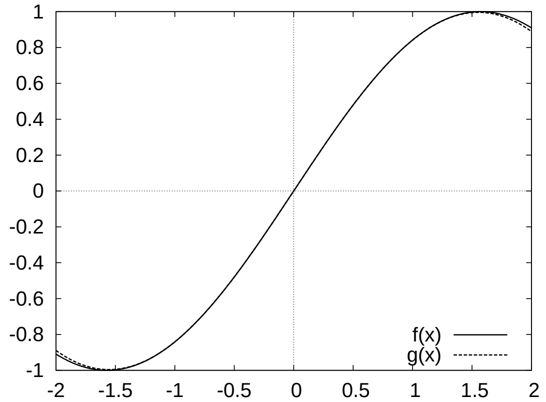
Extra-Aufgabe 1.3:

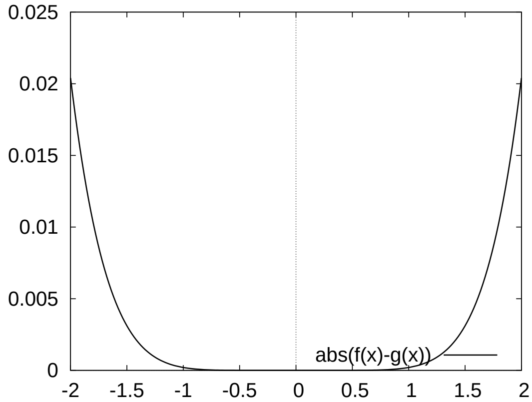
Bestimmen und begründen Sie im Fall b) eine möglichst kleine Schranke M für die Differenz von f und g zwischen den Stützstellen, d.h.

$$|f(x)-g(x)|<M \text{ für alle } x\in\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\ .$$

Weil die auftretenden Zahlen netter sind, und einige Abschätzungen klarer zu entwickeln sind, sei mit einer Fehlerabschätung zu Aufgabe 1.2a) begonnen.

zu Aufgabe 1.2a) Man erkennt aus den Graphen in Abbildung 1, dass die Annäherung des Bruches an den Sinus recht genau ist, mit einem Fehler kleiner 0.0052 auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Der zweite Fehlergraph legt eine ortsabhängige Fehlerfunktion $|f(x)-g(x)|\le 2.2\cdot10^{-4}\,x^7$ nahe.






```
f(x)=sin(x)
g(x)=x*(1-7*x*x/60)/(1+x*x/20)

set term post enhanced 24
set sample 200
set key right bottom
set zeroaxis

set output 'aufgabe1_2a_funktionen.eps'
plot [-2:2] f(x) lw 3,g(x) lw 3
set output 'aufgabe1_2a_fehler.eps'
plot [-2:2] abs(f(x)-g(x)) lw 3
set output 'aufgabe1_2a_fehlerkonst.eps'
plot [-2:2] abs(f(x)-g(x))/abs(x**7) lw 3
unset output
set term wxt
```

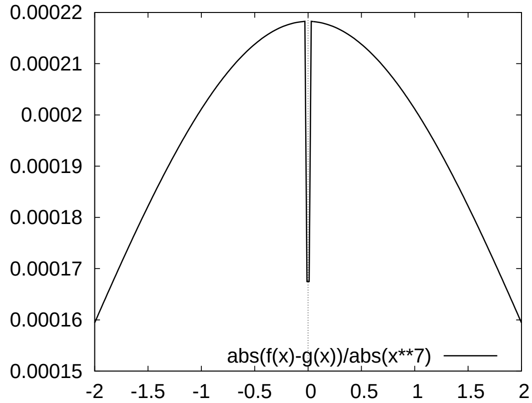


Abbildung 1: Graph und Fehler der Approximation Aufgabe 1.2a)

Um diese Schätzung zu überprüfen, wird die Taylorentwicklung $s_6 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ des Sinus der Ordnung 6 mit Restglied $-\frac{1}{7!}x^7\cos(\theta x))$ der Ordnung 7 in den Zähler der Differenz eingesetzt.

$$|f(x)-g(x)| = \left|\frac{(1+bx^2)s_6(x)-x(1-ax^2)}{1+bx^2} - \tfrac{1}{7!}x^7\cos(\theta x))\right|$$

$$\leq |(1+bx^2)s_6(x)-x(1-ax^2)| + \tfrac{1}{7!}|x|^7,$$

wobei der linke Term sich nach Konstruktion vereinfacht zu

$$\begin{aligned}(1+bx^2)s_6(x)-x(1-ax^2) &= \left(1+\tfrac{1}{20}x^2\right)\left(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5\right)-\left(x-\tfrac{7}{60}x^3\right)\\ &= \tfrac{1}{20\cdot 5!}x^7\,.\end{aligned}$$

Wieder eingesetzt ergibt dies die Abschätzung

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{|x|^7} \leq \tfrac{1}{20\cdot 5!} + \tfrac{1}{42\cdot 5!} = \frac{31}{420\cdot 120} \leq \frac{1}{2400}x^7 \leq 4.2\cdot 10^{-4}\,x^7$$

folgt.

Für eine bessere Abschätzung kann man die Fehlerformel aus dem Leibnizkriterium oder eine Abschätzung des Reihenrestes $r_5(x)$ in $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\,r_5(x)$ gegen eine geometrische Reihe verwenden.

$$\begin{aligned}r_5(x) &= 1 - \frac{1}{6\cdot 7}x^2 + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^4 \mp \cdots\,,\\ |r_5(x)-1| &\leq \frac{x^2}{42}\cdot\left(1+\frac{x^2}{72}+\left(\frac{x^2}{72}\right)^2\ldots\right)\\ &\leq \frac{x^2}{42}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{72}x^2}.\end{aligned}$$

Ist nun $x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} < \frac{5}{2}$, dann folgt für den Nenner

$$1-\frac{1}{72}x^2 > \frac{139}{144} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{42\cdot(1-\frac{1}{72}x^2)} < \frac{1}{40+\frac{78}{144}} \leq \frac{1}{40}\,.$$

In die Fehlerabschätzung eingesetzt ergibt das

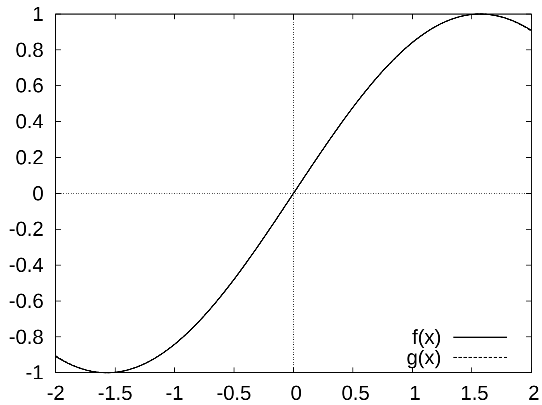
$$|f(x)-g(x)| \leq \left|(1+bx^2)\sin(x)-x(1-ax^2)\right|$$

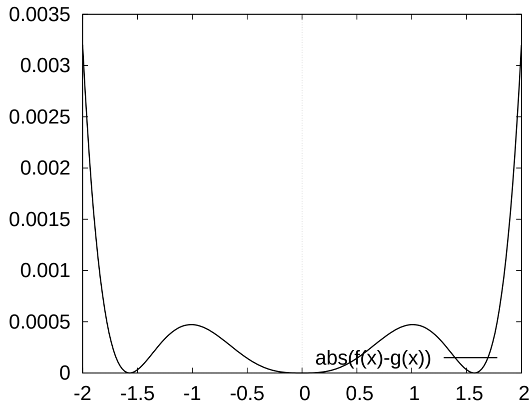
$$\begin{aligned}\text{mit}\quad (1+bx^2)\sin(x)-x(1-ax^2) &= (1+\tfrac{1}{20}x^2)(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5\,r_5(x))-(x-\tfrac{7}{60}x^3)\\ &= \tfrac{1}{120}x^5(r_5(x)-1)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |f(x)-g(x)| \leq \tfrac{1}{120}|x|^5\cdot\frac{x^2}{40} = \frac{1}{4800}|x|^7$$

und $\frac{1}{4800} < 2.1\cdot 10^{-4}$, was der abgelesenen Schranke entspricht. Der entsprechende globale Fehler auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ist dann kleiner als 0.00492.

zu Aufgabe 1.2b)






```
a=4/pi**3*(4-pi)
b=4/pi**2*(pi-3)
e(x)=x**3*(pi**2/4-x*x)**2
f(x)=sin(x)
g(x)=x*(1-a*x*x)/(1+b*x*x)

set term post enhanced 24
set sample 200
set key right bottom
set zeroaxis

set output 'aufgabe1_2b_funktionen.eps'
plot [-2:2] f(x) lw 3,g(x) lw 3
set output 'aufgabe1_2b_fehler.eps'
plot [-2:2] abs(f(x)-g(x)) lw 3
set output 'aufgabe1_2b_fehlerkonst.eps'
plot [-2:2] abs((f(x)-g(x))/e(x)) lw 3
unset output
set term wxt
```

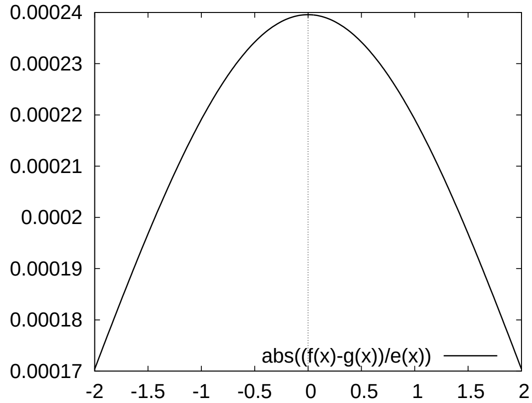


Abbildung 2: Graph und Fehler der Approximation Aufgabe 1.2b)