

Fragen- und Themenkatalog
zur Vorbereitung auf die Prüfung
Analysis I*/II*, WS08/09, SS09
Prof. Griewank

1 Räume

- Reelle Zahlen, Ordnungsrelation, Suprema und Infima.
- Definition metrischer Raum, normierter Raum.
- Offene Mengen, offene Kugeln. Abgeschlossene Mengen.
- Äquivalenz von Normen, auf dem \mathbb{R}^n und allgemeiner. Nicht-äquivalente Normen auf ℓ_1 oder ℓ_∞ .
- Wie könnte man äquivalente Metriken definieren, gibt es nicht-äquivalente Metriken auf dem \mathbb{R}^n ?
- Kompakte Mengen, Auswahl endlicher Teilüberdeckungen, Auswahl konvergenter Teilfolgen.
- Ist die Einheitskugel in \mathbb{R}^n kompakt? Und diejenige in ℓ_∞ .

2 Folgen und Reihen

- Was ist eine Folge?
- In welchem (bisher) allgemeinsten Rahmen kann man die Konvergenz von Folgen diskutieren?
- Was sind Häufungspunkte und Grenzwerte. Oberste und unterste HP.
- Zahlenfolgen, Nullfolgen. Gib wichtige Nullfolgen an.
- Konvergenzkriterien für reelle Folgen, u.a. monotone Konvergenz.
- Cauchyfolgen, Vollständigkeit, Unterschied zwischen reellen und rationalen Zahlen.
- Was ist eine Reihe? Partialsummen. Auf welchen Räumen sinnvoll?
- Konvergenz von Reihen, elementare Konvergenzkriterien, weitere Konvergenzkriterien.
- Welches sind wichtige Vergleichsreihen, wann konvergiert die allgemeine harmonischen Reihe?
- Bedingte und absolute Konvergenz. Rechenregeln für konvergente Reihen.

3 Stetige Funktionen

- Definition der Stetigkeit über Folgen oder offene Umgebungen, für reelle oder allgemeine Funktionen, in einem Punkt oder auf dem vollen Definitionsbereich.
- Rechenregeln für stetige Funktionen, elementare reelle stetige Funktionen (Polynome, Wurzeln, etc.)
- Invertierbarkeit monotoner stetiger Funktionen.
- Zwischenwert- und Nullstellensatz (Bisektionsverfahren zum Auffinden der Nullstellen).
- Extrema auf kompakten Mengen (Satz von Weierstraß)
- gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit.

4 Potenzreihen und Funktionenfolgen

- Was ist eine Potenzreihe? Wann konvergiert eine Potenzreihe, wie sieht das Konvergenzgebiet aus? Konvergenzradius und Berechnungsmöglichkeiten. Absolute Konvergenz im Innern des Konvergenzkreises.
- Wichtige Potenzreihen, geometrische Reihe, Exponential- und verwandte Reihen.
- Definition von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge.
- Stetigkeit der Grenzwertfunktion einer Funktionenfolge, Stetigkeit von Potenzreihen als Folgerung.
- (Wann ist die Differenzierbarkeit der Grenzwertfunktion gesichert?)

5 Differenzierbare Funktionen

- Differenzierbarkeit reeller Funktionen, Differenzenquotient, einseitige Differenzierbarkeit.
- Definition stetige Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen. Gibt es stetig differenzierbare Funktionen ohne zweite Ableitung?
- Satz von Rolle, Mittelwertsatz, Taylorpolynome (Mit Restglied.)
- Extrema reeller differenzierbarer Funktionen.
- partielle, Richtungs- und Frechét-Differenzierbarkeit, erst skalarwertiger, dann vektorwertiger Funktionen.
- Äquivalenz von stetigen partiellen Ableitungen zur stetigen Frechét-Ableitung.
- Schrankensatz, Verallgemeinerung der Taylor-Entwicklung.
- Extrema von Funktionen in mehreren Variablen

6 Integration reeller Funktionen

- Stammfunktion als „Anti-Ableitung“.
- Riemann-Summen, graphische Interpretation, Ober- und Untersummen.
- Riemann-Integrierbarkeit, Äquivalenz zur Richtungsstetigkeit. Monotone sowie stetige Funktionen als richtungsstetige Beispiele.
- Dirichlet-Funktion als Gegenbeispiel.
- Rechenregeln zur Integration, Zerlegung des Integrationsbereiches, Linearität, Positivität.
- Mittelwertsatz in Integralform.

7 Nullstellensuche

- Banachscher Fixpunktsatz. Einfache Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme. Stadt und Stadtplan.
- Formulierung eines Nullstellenproblems als Fixpunktproblem und umgekehrt.
- Newton-Verfahren (auch in der vereinfachten Version) und dessen elementare Eigenschaften (quadratische bzw. lineare Konvergenz in der Nähe einer Nullstelle).

- Inverse-Funktionen-Theorem. Beispiel Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$: Wo sind diese lokal umkehrbar?
- Was ist eine implizite Funktion, Implizite-Funktionen-Theorem. Ableitung der implizit definierten Funktion.
- Extrema unter Nebenbedingungen, Lagrange-Ansatz und Lagrange-Multiplikatoren. Beispiel: Wie würde man die Minima von $f(x, y, z) = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = \pi$ und $x, y, z \in [0, \infty)$ bestimmen?