Mathematik für Informatiker II – Analysis I

Andreas Griewank
(griewank@math.hu-berlin.de)

Übungsleiter:
Thomas Suroviec (surowiec@math.hu-berlin.de)
Fares Maalouf (maalouf@math.hu-berlin.de)

Erstfassung dieses Skriptes:
Jan Riehme, Andrej Ponomarenko

Institut für Angewandte Mathematik
Humboldt Universität zu Berlin

11. Juli 2012

Literaturhinweise I

- Peter Hartmann,
  Mathematik für Informatiker. 3. überarbeitete Auflage, 2004, Vieweg.
  Bei Lehmann's vorhanden, ca. 30€.
  Gute Grundlage, äusserst lesbar, nicht unbedingt an Eliteuniversitäten orientiert. ISBN: 3-528-23181-5
- Otto Forster,
  Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, Vieweg+Teubner Verlag

Teil C

Analysis

Einführung der reellen Zahlen
- Axiomensystem der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- Zifferndarstellung reeller Zahlen
- Rationale und irrationale Zahlen
- Mengenvergleiche

Folgen und ihre Grenzwerte
- Folgen und elementare Eigenschaften
  - Definition
  - Monotonie
  - Konvergenz
  - Nullfolgen
  - uneigentliche Konvergenz
  - Konvergenzkriterien
  - Rechenregeln
  - Beispiele
- Landau–Symbole
  - Lesart
  - Rechenregeln
  - Vergleichbarkeit

C-1 Einführung der reellen Zahlen

> *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*
>
> Leopold Kronecker

Axiomensystem der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

(i) Axiome der Addition und Multiplikation
(ii) Axiome der Anordnung
(iii) Vollständigkeitsaxiom
(iv) Archimedisches Axiom

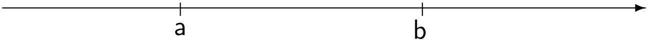
(i) Axiome der Addition und Multiplikation

Siehe Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$

(ii) Axiome der Anordnung

Das Zeichnen „<" heißt „links von" auf dem Zahlenstrahl

$a < b$ ist equivalent zu



$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Es gilt genau eine der Beziehungen: (Trichotomie)
   $$a < b, \quad a = b, \quad b < a$$
2. $a < b \quad \text{und} \quad b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$ (transitivität)
3. $a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c$ (Monotonie bzgl. $+$)
4. $a < b \quad \text{und} \quad 0 < c \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie bzgl. $\cdot$)

Zahlen link von Null (< 0) heißen negativ, rechts von Null (> 0) heißen positiv.

Definition C.1 („größer“, „kleiner gleich“, „größer gleich“)

- $a > b \iff b < a$
- $a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$
- $a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$

Definition C.2 (Bezeichnungen)

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offen
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffen
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffen
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ $\mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

Betrag einer reellen Zahl

Definition C.3

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad |a| \geq 0 \quad \text{und} \quad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$$

Satz C.4 (1.Dreiecksungleichung und 2.Dreiecksungleichung)

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

Bemerkung:

Durch Induktion nach n erhält man die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

(iii) Vollständigkeitsaxiom

Definition C.5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl s mit $x \leq s,\ \forall x \in M$ heißt *obere Schranke* von M. Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x \geq t,\ \forall x \in M$, so heißt t *untere Schranke* von M. Die Menge M heißt dann entsprechend *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*. Falls beides, so ist M *beschränkt*.

Definition C.6

m heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* von M ($m = \min M$), wenn $m \in M$ und m untere Schranke von M ist.

Analog definiert man *Maximum*.

Beispiel C.7

$\mathbb{R}^+$ ist nicht nach oben beschränkt, aber nach unten. 0 ist eine untere Schranke. $\mathbb{R}^+$ besitzt aber kein Minimum!

$[a, b]$ besitzt das Minimum a und das Maximum b.

(a, b) enthält weder ein Minimum noch ein Maximum.
b – obere Schranke, a – untere Schranke.

Definition C.8 (Supremum, Infimum)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$

$s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M ($s = \sup M$) $\iff$
s ist kleinste obere Schranke von M.

$t \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von M ($t = \inf M$) $\iff$
t ist größte untere Schranke von M.

Alternativ:

$$s = \sup M \quad \iff \quad (x \leq s,\ \forall x \in M) \text{ und } (\forall s' < s\ \exists x \in M : s' < x \leq s)$$

Analog für Infimum.

Das *Vollständigkeitsaxiom* von $\mathbb{R}$ sagt:

Jede nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Menge besitzt ein Supremum (Infimum).

Erweiterung

$\inf\{\emptyset\} = +\infty \quad \sup\{\emptyset\} = -\infty$
$\inf\{\mathbb{R}\} = -\infty \quad \sup\{\mathbb{R}\} = +\infty$

Bemerkung:

Besitzt eine Menge ein Maximum, so ist dies gleichzeitig das Supremum. Besitzt eine Menge ein Minimum, so ist dies gleichzeitig das Infimum.

Beispiel C.9

Sei $M = [0, 1)$. Es folgt $\min M = 0 = \inf M$, $\sup M = 1$.
M besitzt kein Maximum aber ein Minimum.

Definition C.10

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$$

Bemerkung:

In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht! Zum Beispiel hat die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ (es gibt keine größte rationale Zahl kleiner als $\sqrt{2}$).

(iv) Archimedisches Axiom

Dieses wird oft auch als Axiom des Eudoxus bezeichnet. Es ist, hier, eine Folgerung aus Ordnungs- und Vollständigkeitsaxiomen.

Sind a und b zwei positive reelle Zahlen, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$na > b$$

Eine Folgerung daraus ist, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$m \leq x < m + 1 .$$

Zifferndarstellung reeller Zahlen

Gegeben Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Wir finden $\mathbf{z_0} \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z_0 \leq a < z_0 + 1$$

Nun teilen wir das Intervall $[z_0, z_0 + 1)$ in 10 gleichlange rechsoffene Teilintervalle. Dann existiert ein $z_1 \in \{0, 1, .., 9\}$, so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} \leq a < z_0 + \frac{z_1 + 1}{10}$$

Nun wird das Intervall $[z_0 + \frac{z_1}{10}, z_0 + \frac{z_1+1}{10})$ in 10 gleichlange rechtsoffene Teilintervalle zerlegt. Wie oben findet man eine ganze Zahl z_2, so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2 + 1}{10^2}$$

usw...

Definition C.11

hierfür schreibt man kurz:

$$a = z_0.z_1 z_2 ...$$

und nennt die rechte Seite *Dezimalbruchdarstellung* der positiven reellen Zahl a. Die Zahlen $z_i \in \{0, 1, ..., 9\}$, $i = 1, 2, ...$ heißen *Ziffern*.

Im Falle $a < 0$ wendet man die obige Konstruktion auf $-a$ an und erhält $-a = z_0.z_1 z_2 ....$ Dafür schreibt man $a = -z_0.z_1 z_2 ....$

Beispiel C.12

Die Dezimalbruchdarstellung $a = 35.704...$ bedeutet

$$35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{4}{10^3} \leq a < 35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

Beispiel C.13

$-1/4 = -0.2500...$, wobei alle weiteren Ziffern 0 sind. In diesem Fall sagt man, der Dezimalbruch sei *endlich* und schreibt einfach $-1/4 = -0.25$.

Beispiel C.14

In der Darstellung $a = 0.727272...$ wiederhole sich ständig die Ziffernfolge 72. Man sagt der Dezimalbruch sei *periodisch* und schreibt

$$a = 0.\overline{72} \quad \text{oder} \quad a = 0.(72)$$

Hieraus kann man a als Bruch ermitteln: $100a - a = 72.\overline{72} - 0.\overline{72} = 72$. Es folgt also $a = 72/99 = 8/11$.

g-adische Darstellung

Der Dezimalbruchdarstellung von $a \in \mathbb{R}$ liegt die fortlaufende Teilung eines Intervalls in 10 gleichlange Intervalle zugrunde.

Statt der Grundzahl $g = 10$ kann man auch jede andere natürliche Zahl $g \geq 2$ zugrundelegen. Hierdurch erhält man die g-adische Darstellung von a die man z.B. in der Form $a = z_0.z_1 z_2 ...|_g$ schreibt, womit die Einschließung

$$z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2 + 1}{g^2}$$

gemeint ist. Hier sind $z_i \in \{0, 1, .., g-1\}$.

Speziell für $g = 2$ ergibt sich die *binäre Darstellung* oder *Dualzahldarstellung*, die in Computern intern verwendet wird.

Beispiel C.15

$1/3 = 0.0101...|_2 = 0.\overline{01}\big|_2$.

Satz C.16

a) *Die durch das obige Verfahren erhaltene g-adische Darstellung der reellen Zahlen ist eineindeutig. Insbesondere kann niemals eine unendliche Ziffernfolge $z_{r+j} = g - 1$ für $j = 1, 2, \ldots$ auftreten.*

b) *Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann rational, d.h. von der Form $a = \pm\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, falls die g-adische Darstellung periodisch ist oder mit $z_{r+j} = 0$ für $j = 1, 2, \ldots$ nach endlich vielen Ziffern abbricht.*

Rationale und irrationale Zahlen

Aus der Definition der rationalen Zahl als Quotient zweier ganzer Zahlen folgt unmittelbar der

Satz C.17

Zwischen zwei rationalen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele (voneinander verschiedene) rationale Zahlen.

Satz C.18

Zwischen zwei reellen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele rationale Zahlen.

Definition C.19

Hat eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ die Eigenschaft:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (b > a) \quad \exists c \in M \ : \quad a < c < b$$

so sagt man, M sei *(überall) dicht in* $\mathbb{R}$, oder die Zahlen von M *liegen (überall) dicht*.

Die vorigen Sätze C.17 und C.18 lassen sich also so formulieren:

Folgerung C.20

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Irrationale Zahlen

Definition C.21

Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt irrational ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Lemma C.22

Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$, so folgt

$$\begin{array}{lll} a+b,\ a-b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{und} & \\ ab,\ a/b,\ b/a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & \text{falls} & b \neq 0 \end{array}$$

Satz C.23

Gibt es überhaupt eine irrationale Zahl, so liegen zwischen je zwei reellen Zahlen a und $b > a$ unendlich viele irrationale Zahlen. (D.h. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überall dicht)

Existenz von irrationalen Zahlen

Satz C.24

Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Ist g nicht k-te Potenz einer natürlichen Zahl, so hat die Gleichung $x^k = g$ keine rationale Lösung.

Lemma C.25a

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt

i) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, falls $x \geq -1$;

ii) $(x + y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$;

iii) $0 < x < y \implies x^n < y^n$.

Satz C.25

Für jede positive reelle Zahl $c \in \mathbb{R}^+$ und natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$, so dass $x^n = c$. Diese wird mit $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$ bezeichnet und wächst monoton mit c, d.h.

$$c < \tilde{c} \quad \implies \quad c^{\frac{1}{n}} < \tilde{c}^{\frac{1}{n}}.$$

Mengenvergleiche

Definition C.26 (nach Cantor)

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $A \to B$ gibt. Ferner sagt man, *B habe eine größere Mächtigkeit als A*, wenn zwar A zu einer Teilmenge von B gleichmächtig ist, B aber zu keiner Teilmenge von A.

Definition C.27

Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn sie endlich ist oder die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen.

Definition C.28

Die Anzahl der Elementen einer Menge M nennt man *Kardinalzahl* und schreibt dafür $|M|$. Als Symbol für die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ wird $\aleph_0$ benutzt.

Lemma C.29

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar $(|Z| = \aleph_0)$.

Satz C.30

$|Q| = \aleph_0$.

Folgerung C.31

Eine Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Satz C.32

Das Interval $[0, 1]$ *ist nicht abzählbar (überabzählbar).*

Folgerung C.33

Die Menge $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Folgerung C.34

Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist nicht abzählbar.*

C - 2 Folgen und ihre Grenzwerte

Folgen und elementare Eigenschaften

Definition C.35 (Folge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n)$ heißt *(reellwertige) Folge*. Der Wert $f(n)$ wird als a_n geschrieben und das *n-te Glied* der Folge genannt. Die Folge selbst wird kurz als $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$ oder einfach a_n notiert.

Bemerkung:

Viele der nachfolgenden Resultate (aber nicht alle) lassen sich verallgemeinern auf Folgen mit anderen Wertebereichen, z.B. $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$.

Beispiel C.36

(a) konstante Folge $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

(c) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$ Sie ergibt: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

Definition C.37 ((streng) monoton fallend/wachsend)

Eine reellwertige Folge $\{a_n\}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $\{a_n\}$ *streng monoton wachsend*. Analog definiert man *(streng) monoton fallend*.

Definition C.38 (beschränkt)

$\{a_n\}$ heißt *nach oben/unten beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben/unten beschränkt ist.

Bemerkung:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ werden als *Supremum/Infimum* von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Definition C.39 (ε – Umgebung)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x - a| < \varepsilon\} = (\ a - \varepsilon,\ a + \varepsilon\ )$$

die ε–*Umgebung* von a.

Definition C.40 (konvergente Folge)

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt *konvergent* gegen a, wenn in jeder ε–Umgebung von a „fast alle“ (mit endlich vielen Ausnahmen) Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon) : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und nennt a den *Grenzwert (Limes)* von $\{a_n\}$.

Eine reellwertige Folge heißt *divergent*, wenn es keinen solchen Grenzwert gibt.

Definition C.41

Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen *Nullfolgen*.

Beispiel C.42

(a) Die konstante Folge ist konvergent:

$$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_0 \cdot \varepsilon$. Wegen

$$0 < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0}, \quad \forall n \ge n_0 \qquad \text{ist also} \qquad \frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0), \quad \forall n \ge n_0$$

(c) Die Folge $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Definition C.43 (uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz)

Sei $\{a_n\}$ eine Folge. Dann *strebt a_n gegen ∞*, ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > r, \forall n \geq n_0$. In diesem Fall spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz* oder *bestimmter Divergenz*.

Analog definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < r, \forall n \geq n_0$.

Beispiel C.44

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

Satz C.45 (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Eine konvergente Folge ist beschränkt, *d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.*

Satz C.46 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Satz C.47 (Konvergenzkriterien)

(i) Vergleichskriterium*: Seien* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *reelle Folgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = b = \lim_{n\to\infty} c_n$. *Dann konvergiert* $\{b_n\}$ *und es gilt* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(ii) *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert.*

Beispiel C.48

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Also ist diese Folge nach C.47 (ii) konvergent.

Satz C.49 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *reelle Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

(a) *Falls* $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *so ist* $a \leq b$.

(b) *Falls* $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *so ist* $a \leq b$ *($a < b$ ist i.A. falsch!).*

(c) $\lim_{n\to\infty}\{a_n \pm b_n\} = a \pm b$

(d) $\lim_{n\to\infty}\{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b$ *(d.h. insbesondere* $\lim_{n\to\infty}\{c \cdot a_n\} = c \cdot a$*).*

(e) *Ist* $b \neq 0$, *so existiert* n_0 *mit* $b_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. *Dann sind auch* $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}_{n\geq n_0}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geq n_0}$ *konvergent und haben den Limes* $\frac{1}{b}$ *bzw.* $\frac{a}{b}$.

(f) $\{|a_n|\}$ *konvergiert gegen* $|a|$.

(g) *Sei* $m \in \mathbb{N}$ *und* $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}.$$

Beispiel C.50

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{17}{n} = 17 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 17 \cdot 0 = 0$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{5}{7}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (wird in der Übung besprochen)

Landau–Symbole

Definition C.51

Eine Folge $A = \{a_n\}$ ist „Groß-O" von $B = \{b_n\}$, wenn der Quotient $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ beschränkt ist. Die Folge A ist „Klein-o" von B, wenn $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ eine Nullfolge ist. Wir schreiben $A = O(B)$ bzw. $A = o(B)$. O und o nennt man auch *Landau–Symbole*.

Beispiel C.52

(a) $2n^2 + 3n + 4 = O(n^2)$

(b) $2n^2 + 3n + 4 = o(n^3)$

Notation:

Im folgenden verknüpfen wir Folgen komponentenweise, so dass für $\circ \in \{+, -, *\}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante:

$$A \circ B = \{a_n \circ b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad c \cdot A = \{c \cdot a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Mehrdeutigkeit

Die Angabe $A = O(B)$ ist nicht eindeutig. Für $A = \{n + 2\}$ sind z.B.:

$$A = O(n^2),$$
$$A = O(n),$$
$$A = O(\frac{n}{2})$$

wahre Aussagen.Es gilt:

- Konstante Faktoren ändern nicht die Ordnung.
  $$O(B) = O(c \cdot B), \quad \forall c \in \mathbb{R}$$
- Terme niedriger Ordnung sind unwichtig:
  z.B. haben $\{n^2 + 3n + 4\}$ und $\{n^2 + 17n\}$ dieselbe Ordnung $O(n^2)$.

Satz C.53 (Rechenregeln für Landau-Symbole)

Für reelle Zahlenfolgen A, B, C und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $A = O(A), B = o(A) \implies B = O(A)$

(b) $c \cdot A = O(A)$

(c) $$\begin{array}{l} B = O(A) \wedge C = O(A) \implies B \pm C = O(A) \\ B = o(A) \wedge C = o(A) \implies B \pm C = o(A) \end{array}$$

(d) $A' = O(A) \wedge B' = O(B) \implies A' \cdot B' = O(A \cdot B)$

(e) $$\left.\begin{array}{l} A = O(B), \quad B = O(C) \implies A = O(C) \\ A = o(B), \quad B = o(C) \implies A = o(C) \end{array}\right\rangle \textit{Transitivität}$$

Nicht alle Folgen sind vergleichbar. Betrachte z.B. $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$ mit

$$a_n = \begin{cases} n^2 & (n \text{ gerade }) \\ n & (n \text{ ungerade }) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} n & (n \text{ gerade }) \\ n^2 & (n \text{ ungerade }) \end{cases}$$

Für gerades n sieht man, dass $A \neq O(B)$.
Für ungerades n sieht man, dass $B \neq O(A)$

Definition C.54

Wir sagen

$$\begin{aligned} O(A) = O(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad A = O(B) \text{ und } B = O(A) \\ O(A) < O(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad A = O(B) \text{ und } B \neq O(A) \end{aligned}$$

Häufig verwendete Prototypen von Vergleichsfunktionen

O	Laufzeitverhalten
$O(1)$	konstant
$O(\log_a n), a > 1$	logarithmisch
$O(n)$	linear
$O(n \log_a n), a > 1$	$n \log n$
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$	polynomial
$O(a^n)$	exponentiell

Es gilt:

$$\begin{aligned} &O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < \\ &< \quad \dots \quad < O(n^k) < \quad \dots \quad < O(2^n) < O(3^n) < \dots \end{aligned}$$

n	$\log_2 n$	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n
10	3.32	33.22	100	1000	1024
100	6.64	664.4	10000	10^6	$1.27 \cdot 10^30$
1000	9.97	9966	10^6	10^9	$\approx 10^{301}$
10000	13.29	132877	10^8	10^{12}	$\approx 10^{3010}$

Für große n sollte man daher nicht auf Fortschritte im Rechnerbau hoffen, sondern nach Algorithmen suchen, die eine bessere Ordnung besitzen.

Teilfolgen und Häufungspunkte

Definition C.55 (Teilfolge)

Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, die *Indexfolge*, streng monoton wachsend ist, d.h., $n_{k+1} \geq n_k + 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

Bei der Konstruktion von Teilfolgen muss oft die strenge Monotonie explizit gesichert werden.

Beispiel C.56

a) Mit $n_k = 2k$ ist $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der geraden Glieder.

b) Man kann die Indizes nach Restklassen aufteilen. Die Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k+1}) und (a_{3k+2}) schöpfen die Folge (a_n) vollständig aus.

Definition C.57 (Häufungspunkt)

Konvergiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n), so nennt man den Grenzwert der Teilfolge einen *Häufungspunkt* der Folge (a_n)

Beispiel C.58

Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat die zwei Häufungspunkte ± 1.
Denn die Teilfolge (a_{2k}) der geraden Indizes hat den Grenzwert

$$a_{2k} = (-1)^{2k} + \tfrac{1}{2k} = 1 + \tfrac{1}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1\,,$$

und die Teilfolge (a_{2k+1}) der ungeraden Indizes hat den Grenzwert

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \tfrac{1}{2k+1} = -1 + \tfrac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -1\,.$$

Satz C.59

Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, ihren Grenzwert. D.h., alle Teilfolgen konvergieren und haben denselben Grenzwert wie die gesamte Folge.

Satz C.60 (Charakterisierung von Häufungspunkten)

Die Zahl $b \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Folge (a_n) genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von b unendlich viele Folgeglieder liegen,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n > N \; : \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Bemerkung

Gilt eine Eigenschaft für *unendlich viele* Folgeglieder, so kann es auch unendlich viele Ausnahmen geben. Gilt eine Eigenschaft für *fast alle* Glieder einer Folge, so sind nur endlich viele Ausnahmen erlaubt.

Satz C.61 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

Für eine nach oben (unten) beschränkte Folge (a_n) ist die Menge H ihrer Häufungpunkte entweder leer oder ebenfalls nach oben (unten) beschränkt. Deshalb ist es sinnvoll, von dieser Menge das Supremum (Infimum) zu betrachten.

Definition C.62 (Limes superior und inferior)

Sei (a_n) eine Folge und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Dann ist

i) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \sup H$
der *oberste Häufungspunkt* oder *Limes superior* und

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \inf H$
der *unterste Häufungspunkt* oder *Limes inferior*.

Beispiel C.63

Für die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist $\overline{\lim}\, a_n = 1$ und $\underline{\lim}\, a_n = -1$

Satz C.64 (Äquivalente Charakterisierung des Limes superior)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $S \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent

a) $S = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$,

b) $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{\, a_{n+k} \ :\ k \in \mathbb{N} \,\}$,

c) *für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:*

   i) *fast alle Folgeglieder sind kleiner als $S + \varepsilon$ und*

   ii) *es gibt unendlich viele Folgeglieder in der ε-Umgebung $(S - \varepsilon, S + \varepsilon)$.*

Durch Betrachten der Folge $(-a_n)$ erhält man eine analoge Charakterisierung des Limes inferior.

Cauchy-Folgen

Es ist gelegentlich sinnvoll, ein Kriterium für Konvergenz zu besitzen, welches ohne die Kenntnis des Grenzwertes auskommt.

Definition C.65 (Cauchy-Folge)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall der Länge ε gefunden werden kann, welches fast alle Folgeglieder enthält, oder wenn äquivalent gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N(\varepsilon)\,.$$

Satz C.66 (Cauchy-Kriterium)

Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung:

Die Aussage, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt, ist eine äquivalente Charakterisierung der Vollständigkeit. Im Gegensatz zur vorherigen Charakterisierung durch die Existenz von Suprema lässt sich der Begriff der Vollständigkeit auf diese Weise für $\mathbb{R}^n$, Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und beliebige metrische Räume definieren.

Beispiel C.67

Betrachte die Folge (a_n) mit

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$$

Dann ist

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Also kann diese Folge keine Cauchy-Folge sein und konvergiert daher nicht. Da sie monoton wachsend ist, divergiert sie bestimmt gegen $+\infty$.

(Diese Folge ist die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe.)

Definition C.68

Gegeben sei eine Folge $(a_\nu)_{n\geq 0}$, und es sei

$$s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

Dann heißt die Folge $\{s_n\}_{n\geq 0}$ eine *unendliche Reihe*, in Zeichen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

und s_n ihre *n-te Partialsumme.*

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *konvergent*, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert. Den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ nennt man *Wert der Reihe* und schreibt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = s$$

Bemerkung:

1. Eine Reihe ist also nichts anderes als eine spezielle Folge, nämlich die Folge der Partialsummen.
2. Der Ausdruck $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ hat zweierlei Bedeutungen: erstens die Folge $(s_n) = \left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)$ der Partialsummen, zweitens, im Fall der Konvergenz, den Wert der Reihe ($= \lim\limits_{n\to\infty} \{s_n\}$).

Beispiel C.69 (Geometrische Reihe)

Sei $a_\nu = q^\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots$; dann ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

Für $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1 - q}$$

Beispiel C.70

(a)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1.$$

(b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = e$$

Bemerkung:

Abänderung von endlich vielen Gliedern ändert nichts am Konvergenzverhalten (da ab einer Stelle die neuen Partialsummen sich von den alten nur um eine Konstante unterscheiden), im allgemeinen aber den Wert der Reihe.

Satz C.71

Die „harmonische Reihe“ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ *ist divergent.*

Satz C.72

1. *Sind* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *konvergent, so sind* $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu)$ *und* $\sum_{\nu=0}^{\infty} (c a_\nu)$ *mit* $c \in \mathbb{R}$ *konvergent, und es gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (c a_\nu) = c \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu.$$

2. *Das Monotoniekriterium (Satz C.47 (ii)) und das Cauchy-Kriterium (Satz C.66) gelten auch für Reihen.*

Bemerkung:

1. Aus dem Monotoniekriterium folgt: Sind die Glieder einer Folge $\{a_\nu\}$ positiv und ist die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen beschränkt, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$; denn $\{s_n\}$ wächst streng monoton und $\lim\{s_n\}$ existiert.
2. Das Cauchy-Kriterium sagt aus: Äquivalent zur Konvergenz ist

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \; \forall k \in \mathbb{N} \text{ gilt } \left| s_{n+k} - s_n \right| < \varepsilon,$$

das heißt

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} a_\nu \right| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Umgangssprachlich: Schlußstücke (Reste) konvergenter Reihen werden beliebig klein!

Beispiel C.73 (Allgemeine harmonische Reihe)

Für $\alpha > 1$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\alpha}$.

Wegen $\frac{1}{\nu^\alpha} > 0$ ist die Folge der Partialsummen monoton und es muss nur die Beschränktheit gezeigt werden. Es ist

$$\sum_{\nu=2^{\mathbf{k}}}^{2^{\mathbf{k+1}}-1} \frac{1}{\nu^\alpha} \leq \sum_{\nu=2^{\mathbf{k}}}^{2^{\mathbf{k+1}}-1} \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k}$$

Für $N < 2^n$ ist die Partialsumme kleiner als eine geometrische Summe

$$S_N = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=2^{\mathbf{k}}}^{2^{\mathbf{k+1}}-1} \frac{1}{\nu^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \leq \frac{1}{1-q}$$

falls $q = \frac{1}{2^{\alpha-\mathbf{1}}} < 1$ gilt, was genau für $\alpha > 1$ erfüllt ist.
Die Divergenz für $\alpha \leq 1$ folgt aus der Divergenz der harmonischen Reihe.

Bemerkung:

Speziell folgt aus dem Cauchy-Kriterium: Ist $\sum a_\nu$ konvergent, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt } \left| s_{n+1} - s_n \right| < \varepsilon.$$

Wegen $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ folgt: $\{a_n\}$ muss gegen Null konvergieren.

Satz C.74 (Notwendige Konvergenzbedingung)

Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergent, so ist* $\lim_{\nu \to \infty} \{a_\nu\} = 0$.

Bemerkung:

Gilt also $\lim\{a_\nu\} \neq 0$, so kann die Reihe nicht konvergieren. Die Umkehrung des Satzes ist falsch: $\sum \frac{1}{\nu}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{\nu} \to 0$ für $\nu \to \infty$ (vergleiche Satz C.71).

Definition C.75

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert.

Beispiel C.76

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{1}{\nu}$ konvergiert nicht absolut, aber konvergiert (nach Satz C.88, Leibniz-Kriterium).
2. Für $|q| < 1$ ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ absolut konvergent. Die Werte sind aber im Allgemeinen von den Vorzeichen abhängig:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

Satz C.77

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch, siehe Beispiel C.76(1).

Konvergenzkriterien

Satz C.78

1. *Es gilt das Majorantenkriterium: Ist* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \geq n_0$ *und konvergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$*, so konvergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut.*
2. *Es gilt das Minorantenkriterium: Ist* $a_n \geq b_n \geq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *und divergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$*, so divergiert* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$*.*

Bemerkung:

Die Reihe $\sum b_\nu$ nennt man *konvergente Majorante* von $\sum a_\nu$ im Fall (a), *divergente Minorante* von $\sum a_\nu$ im Fall (b).

Beispiel C.79

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ ist konvergent, wegen $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ und Satz C.77.

Satz C.80 (Quotientenkriterium von d'Alambert)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt das Quotientenkriterium:

1. $\exists q < 1 \ \exists n_0 \ (n_0 \geq n_1)$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist absolut konvergent.*
2. $\exists n_0 \ (n_0 \geq n_1)$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist divergent.*

Bemerkung:

Es genügt nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$; es muß ein solches (festes) q existieren. Etwa ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für $a_n = \frac{1}{n}$, aber $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Beispiel C.81

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz C.82 (Quotientenkriterium in Limes-Form)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt:

1. *Ist* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *so konvergiert die Reihe absolut.*
2. *Ist* $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *so divergiert die Reihe.*

Satz C.83 (Wurzelkriterium von Cauchy)

Es gilt das Wurzelkriterium:

1. $\exists q < 1\ \exists n_0$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \Rightarrow \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist absolut konvergent.*
2. *Ist* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* n, *so ist* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *divergent.*

Beispiel C.84

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert absolut.

Satz C.85 (Wurzelkriterium in Limes-Form)

Wenn der Grenzwert $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ *existiert, so ist* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$

1. *absolut konvergent für* $q < 1$.
2. *divergent für* $q > 1$.

Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *so ist keine Aussage möglich.*

Beispiel C.86

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{2n+3}{3n+2})^n$ konvergiert absolut.

Definition C.87

Eine Reihe heißt *bedingt* konvergent, wenn sie konvergiert aber nicht absolut konvergiert.

Ein Kriterium für bedingte Konvergenz liefert

Satz C.88 (Leibniz-Kriterium)

Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fällt $\{a_n\}$ monoton gegen Null, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Es gilt für beliebige $m, n \geq 0$

$$s_{2m+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq s_{2n}.$$

Beispiel C.89

$$1.)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad 2.)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

sind konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Bemerkung:

Die Bedingung $\lim\{a_n\} = 0$ ist notwendig, vergleiche Satz C.74. Wichtig ist auch die Monotonie von $\{a_n\}$: Zum Beispiel mit der Folge $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$ erhält man die (unbeschränkten) Partialsummen $1, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \ldots$ der harmonischen Reihe.

Umordnung, unbedingte Konvergenz

Bei endlichen Summen ist die Reihenfolge der Summanden beliebig, nicht aber bei unendlichen Reihen:

Beispiel C.90

$$\begin{array}{rcccccccccc}
s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & + \dots \\
\frac{1}{2}s = & & +\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & + \dots \\
\hline
\frac{3}{2}s = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & + \dots
\end{array}$$

Dabei stehen in der Summe dieselben Summanden wie in der Ausgangsreihe. Daher könnte man erwarten, daß die Grenzwerte s und $\frac{3s}{2}$ übereinstimmen, was aber wegen $s \neq 0$ ersichtlich nicht der Fall ist.

Definition C.91

Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung zum selben Wert konvergiert.

Satz C.92

Genau die absolut konvergenten Reihen sind unbedingt konvergent.

Beispiel C.93

Der Riemannsche Umordnungssatz besagt: Man kann bedingt konvergente Reihen zu jedem beliebigen Wert s umordnen. Wir betrachten $\sum(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}$ und geben den Wert $s = 1.5$ vor:

$$s^{(1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} = 1.5\overline{3}$$

$$s^{(2)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30} = 1.0\overline{3}$$

$$s^{(3)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{137099}{90090} = 1.5\overline{218004}$$

$$s^{(4)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = 1.27\overline{180042}.$$

C - 4 Stetigkeit

Grenzwerte von Funktionen

Motivation:

In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn die Eingabegrößen nur gering variiert werden. Mathematisch kann man dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisieren.

Definition C.94 (Konvergenz gegen Grenzwert)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. $f(x)$ konvergiert für $x \to \xi$ gegen den Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \eta.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Beispiel C.95

1. $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert.
2. Die Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ hat in 0 (also an der Sprungstelle) keinen Grenzwert.

Satz C.96 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Wenn für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ existieren, so gilt:

(a) $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$, *falls* $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0$

(d) $\lim\limits_{x\to\xi}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ *für beliebige* $c \in \mathbb{R}$

(e) $\lim\limits_{x\to\xi} |x| = |\xi|$

Stetigkeit reeller Funktionen

Definition C.97 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen, d.h. es ist:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f\big(\lim_{x \to \xi} x\big) = f(\xi).$$

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten stetig ist.

Satz C.98 (ε–δ–Kriterium der Stetigkeit)

Für eine Funktion f sind äquivalent:

(i) *f ist stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\xi) = \lim_{x \to \xi} f(x)$.*

(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass:* $|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Bemerkung:

1. Im Allgemeinen ist δ von ε und von ξ abhängig.
2. Anschaulich bedeutet das ε-δ-Kriterium, dass es unter den Funktionswerten in der Nähe einer Stetigkeitsstelle keine Ausreißer gibt; eine ganze δ-Umgebung von ξ wird unter f in einen ε-Streifen um $f(\xi)$ abgebildet.
   Hinreichend kleine Änderungen in den Argumenten einer stetigen Funktion führen also nur zu (beliebig) kleinen Änderungen der Funktionswerte.

Beispiel C.99

$f(x) = x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung

1. Satz C.96 besagt, dass für in ξ stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(\xi) \neq 0$) sowie $c \cdot f(x)$ stetig in ξ sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.
2. Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.
3. Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall liegen die betrachteten Folgen $\{x_n\}$ in D.

Beispiel C.100

1. Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.
2. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.
3. $\cosh x$ und $\sinh x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Satz C.101 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

(a) ***Nullstellensatz:*** *Ist $f(a) \cdot f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

(b) ***Zwischenwertsatz:*** *Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.*

(c) ***Stetigkeit der Umkehrfunktion:*** *Ist f zusätzlich streng monoton wachsend auf $[a,b]$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.*

(d) ***Maximum-Minimum-Eigenschaft:*** *Es existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ und $f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.*

Beispiel C.102 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

1. Es sind $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ und $f(x) = \ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig.
2. Die Arcusfunktionen arcsin, arccos sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Beispiele stetiger Funktionen

Beispiel C.103 (Potenzfunktionen)

Potenzfunktionen besitzen die Struktur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ definiert man $x^0 = 1$. Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig.
Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \qquad x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \qquad (x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Beispiel C.104 (Wurzelfunktionen)

Schränkt man die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, so ist sie dort nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach Satz C.101 (c) existiert daher eine stetige streng monoton wachsende Umkehrfunktion: die n-te Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$.
Mit $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, $x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$ sowie $x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen.

Beispiel C.105 (Exponentialfunktion)

Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x$$

die Exponentialfunktion zur Basis a. Exponentialfunktionen sind stetig. Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion, bei der die Eulersche Zahl

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

als Basis dient. Man bezeichnet sie als

$$\exp(x) := \mathbf{e}^x.$$

Beispiel C.106 (Logarithmusfunktion)

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

bezeichnet man als Logarithmusfunktion zur Basis a.
Für $a = \mathbf{e}$ ergibt sich der natürliche Logarithmus ln.
Es gelten die Rechenregeln:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(x^p) = p \log_a x.$$

Beispiel C.107 (Trigonometrische Funktionen)

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit $\quad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi \quad$ bezeichnet. Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin\varphi$ und die Cosinusfunktion $\cos\varphi$ definiert. Dabei misst man den Winkel φ im Bogenmaß: die Länge des entsprechenden Kreissegments im Einheitskreis.
Der Umfang des Einheitskreises beträgt $2 \cdot \pi$, wobei π die Kreiszahl $\pi \approx 3,14159\ldots$ ist.
Es gilt:

(a) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

(b) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

(c) $\cos(-\varphi) = cos\varphi$

(d) $\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin\varphi$, $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos\varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (2π-Periodizität)

(e) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Beispiel C.108 (Trigonometrische Funktionen (Forts.))

Die Tangensfunktion tan ist definiert als $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.
Die Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ und es gilt π-Periodizität: $\tan(\varphi + k\pi) = \tan\varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel C.109 (Trigonometrische Umkehrfunktionen)

Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken auf dem sie streng monoton sind, so können wir dort Umkehrfunktionen definieren.

1. cos ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ heißt Arcus-Cosinus.
2. sin ist in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcus-Sinus.
3. tan ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

C - 5 Differenzierbarkeit

Motivation:

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, stellt sich die Frage: "Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?
  Wenn die Funktion z.B. den Ort eines Punktes in Abhängikeit von der Zeit bei einer Bewegung entlang einer Linie beschreibt, so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion nur in unmittelbarer Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern.

Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung bzw. Differentiation.

Definition C.110

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. f heißt *in ξ differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert und endlich ist.
Der Grenzwert heißt dann die *Ableitung bzw. Differentialquotient* von $f(x)$ in ξ und wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Den Übergang von f zu f' nennt man *Differenzieren* oder *Ableiten*.

Bemerkung:

(a) $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt *Differenzenquotient*. Dieser gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f an.
Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung in $(\xi, f(\xi))$ über.

(b) Die Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$ ist:

$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

(c) Wie bei der Stetigkeit übertragen sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq \mathbb{R}$.

Beispiele C.111

1. $f(x) = ax + b$ (Gerade mit Steigung a).
   Für $h \neq 0$ ist

   $$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \frac{(a(\xi+h)+b) - (a\xi+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

   Daraus folgt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = a$; es ist also $f'(x) = a \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = x^{n-1} + \xi x^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}.$$

   Daraus folgt

   $$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \xi^{n-1} + \xi^{n-1} + \ldots + \xi^{n-1} = n \cdot \xi^{n-1}.$$

   Also ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ableitungen elementarer Funktionen

(a) $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

(b) $f(x) = \mathbf{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathbf{e}^x$

(c) $f(x) = \ln x$ mit $x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$

(e) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

(f) $f(x) = \tan x$ mit
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$

Definition C.112

Die Funktion f heißt in $\xi \in D$ *linear approximierbar*, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\delta : U_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(\xi + \Delta x) = f(\xi) + c\Delta x + \delta(\Delta x) \text{ mit } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{1}$$

(m.a.W. $\delta(\Delta x) = o(\Delta x)$) gilt.

Satz C.113

f ist in ξ differenzierbar $\Longleftrightarrow$ f ist in ξ linear approximierbar.

Satz C.114

Ist f in ξ differenzierbar, so ist f in ξ stetig.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch; vergleiche $f(x) = |x|$.
Differenzierbarkeit ist also mehr als Stetigkeit. Der Graph ist nicht nur in einem Zug zu zeichnen, er besitzt auch keine Ecken.

Satz C.115 (Ableitungsregeln)

f, g seien in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

a) *$f \pm g$ ist in ξ differenzierbar mit $(f \pm g)'(\xi) = f'(\xi) \pm g'(\xi)$;*

b) *$c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, ist in ξ differenzierbar mit $(c \cdot f)'(\xi) = c \cdot f'(\xi)$;*

c) *$f \cdot g$ ist in ξ differenzierbar mit (Produktregel)*

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi).$$

d) *Ist $g(\xi) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ ist in ξ differenzierbar mit (Quotientenregel)*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

[Kurzfassung von (c) und (d): $(fg)' = f'g + fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.]

Satz C.116 (Kettenregel)

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ und $g : f(D) \to \mathbb{R}$ in $f(\xi) \in f(D)$ differenzierbar, so ist $h := g \circ f$ in ξ differenzierbar, und es gilt

$$h'(\xi) = (g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Bemerkung:

Für $h = g \circ f$ heißt g die äußere, f die innere Funktion.
h' = Ableitung der äußeren Funktion an der inneren Stelle mal Ableitung der inneren Funktion.
Kurzfassung: $h' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Satz C.117 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to f(I)$ eine umkehrbare stetige Funktion mit der Umkehrfunktion $\varphi := f^{-1} : f(I) \to I$.
Ist f in $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist φ in $\eta = f(\xi) \in f(I)$ differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(\eta) = \frac{1}{f'(\varphi(\eta))}.$$

Kurzform: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Sätze über differenzierbare Funktionen

Satz C.118 (Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbar. Gilt* $f(a) = f(b)$*, dann existiert* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$*.*

Satz C.119 (Mittelwertsatz, Lagrange)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbar. Dann existiert* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bemerkung:

Anschaulich heißt dies: In mindestens einem Punkt ξ ist die Tangente parallel zur Sekante von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$.
Im Weg-Zeit-Diagramm: Zu mindestens einem Zeitpunkt erreicht man genau die Durchschnittsgeschwindigkeit (Differenzierbarkeit vorausgesetzt).

Satz C.120 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz, Cauchy)

Es seien f, g auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Satz C.121 (Regel von de l'Hospital)

(a) *Es seien f, g auf (a, b) stetig differenzierbar mit $\xi \in (a, b)$, $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

(b) *Es seien f, g stetig differenzierbar auf $(a, b) \setminus \xi$, $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

Beispiel C.122

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \left(„\frac{0}{0}“\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(„\frac{\infty}{\infty}“\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

3. Das Verfahren funktioniert natürlich nur bei „unbestimmten Ausdrücken“ wie $\frac{0}{0}$:
Zum Beispiel ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0$, aber $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$.

Bemerkung:

Häufig ist vor der Anwendung der Regel von de l'Hospital eine Umformung erforderlich:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ bzw. } f(x) - g(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big).$$

Beispiel C.123

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \Big(„\frac{0}{0}“\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \Big(„\frac{0}{0}“\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} \cdot (-x^2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-2)\cdot(-x^2)}{x^2-1} = 2$$

Höhere Ableitungen

Definition C.124

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, das heißt, es existiert die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$.

- Ist f' auf I stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar*.
- Ist f' auf I differenzierbar, so nennt man f *zweimal differenzierbar* und $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f auf I.
- Entsprechend erklärt man n-malige Differenzierbarkeit und n-malige stetige Differenzierbarkeit für $n \in \mathbb{N}$.

Man schreibt $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f', \ldots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Beispiel C.125

1. Für $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x, \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n. Es ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

2. Für $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 4$. Also ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

3. Für $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \ldots$ Daher ist f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$.

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Motivation:

Die Kenntnis von Ableitungen ermöglicht verschiedene Aussagen über den Graphen einer Funktion, so zu Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten und Wendepunkten.

Satz C.126 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)

Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion f gilt

1. $f'(x) \geq 0 \ (\leq 0) \ \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad$ *f ist monoton wachsend (fallend);*
2. $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad$ *f ist auf I konstant;*
3. $f'(x) > 0 \ (< 0) \ \forall x \in I \quad \Longrightarrow$
   ist streng monoton wachsend (fallend).

Bemerkung:

Ist f streng monoton wachsend, so folgt nicht notwendig $f'(x) > 0$ (vergleiche $f(x) = x^3$).

Definition C.127

Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales* (*absolutes*) *Maximum*, wenn $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in D$ gilt.
a heißt dann *globale Maximalstelle*, $f(a)$ *globales Maximum* von f.

$b \in D$ heißt *lokale Maximalstelle*, ($f(b)$ *lokales Maximum*), falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(b) \geq f(x)\ \forall x \in (b-\delta, b+\delta)$.
Analog erklärt man *Minimalstellen, Minimum*. Maxima und Minima

heißen auch *Extrema* (entspr. *Extremstellen*).

Satz C.128 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema, Fermat)

Ist f auf dem offenen Intervall I differenzierbar und hat in $\xi \in I$ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.
(Eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißt auch stationärer Punkt).

Bemerkung:

1. Ist f differenzierbar und ξ Extremstelle von f, so ist die Tangente an f in ξ waagerecht.
2. $f(x) = |x|$ hat in $\xi = 0$ ein globales Minimum, es ist aber keine Tangente erklärt.
3. Die Umkehrung von Satz C.128 ist falsch: $\xi = 0$ ist stationärer Punkt von $f(x) = x^3$ $[f'(0) = 0]$, aber keine Extremstelle.
4. Extremstellen können außer in stationären Punkten auch am Rand des Intervalls liegen oder Stellen sein, in denen f nicht differenzierbar ist.

Satz C.129 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei I offenes Intervall, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$).
Weiterhin gelte $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.
Dann gilt:

(a) *Wenn n gerade ist, so liegt in ξ ein lokales Extremum vor.*
  - *Ist $f^{(n)}(\xi) > 0$, so ist es ein lokales Minimum.*
  - *Ist $f^{(n)}(\xi) < 0$, so ist es ein lokales Maximum.*

(b) *Für ungerades n liegt kein Extremum vor.*

Beispiel C.130

1. Für $f(x) = x^3$ gilt: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, also $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6 \neq 0$; d.h. im Punkt 0 liegt kein Extremum vor.
2. Für $f(x) = x^4$ gilt: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)} = 24$, also $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) > 0$; d.h. im Punkt 0 liegt ein lokales Minimum vor.

Definition C.131 (Konvexität, Konkavität)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

- *konvex* in I, wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

- *konkav* in I, wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Gelten strenge Ungleichungen, so heißt f in I streng konvex bzw. konkav.

Bemerkung:

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf;
konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf.

Satz C.132

Sei f stetig differenzierbar in I. Dann gilt:

(a) f *ist in* I *konvex* $\iff$ f' *ist monoton wachsend auf* I

(b) f *ist in* I *konkav* $\iff$ f' *ist monoton fallend auf* I

Satz C.133

Sei f zweimal stetig differenzierbar in I. Dann gilt:

(a)
- f *ist in* I *konvex* $\iff$ $f'' \geq 0$ *auf* I.
- $f'' > 0$ *auf* I $\implies$ f *ist streng konvex in* I.

(b)
- f *ist in* I *konkav* $\iff$ $f'' \leq 0$ *auf* I
- $f'' < 0$ *auf* I $\implies$ f *ist streng konkav in* I.

Bemerkung:

Das Vorzeichen von f'' gibt also Auskünfte über das Krümmungsverhalten des Graphen von $y = f(x)$:

- Ist $f'' > 0$, so ist f' monoton wachsend; also wird f steiler oder wechselt von Fallen zum Steigen. Es liegt also eine Linkskrümmung vor.
- Ist $f'' < 0$, so liegt eine Rechtskrümmung vor.

Beispiel C.134

1. Typische konvexe Funktionen sind $f(x) = x^2$ und $g(x) = \mathbf{e}^x$.
2. Die Funktion $h(x) = \ln(x)$ ist konkav.

Definition C.135 (Wendepunkt)

Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen *Wendepunkt* in ξ, falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

Bemerkung:

In einem Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton wachsend und rechts von ξ monoton fallend; wir haben einen Konvex-konkav-Wechsel.
- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Minimum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton fallend und rechts von ξ monoton wachsend; wir haben einen Konkav-konvex-Wechsel.

Satz C.136

Ist f auf I konvex (konkav) so ist jedes seiner lokalen Minima (Maxima) auch globales Minimum (Maximum). Ist f sogar streng konvex oder konkav so gibt es nur einen einzigen Minimalpunkt bzw. Minimalwert.

Bemerkung:

Satz C.136 gilt auch in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und ganz allgemeinen Räumen beliebiger Dimension. Er ist von grundlegender Bedeutung in der Optimierung.

Der Satz von Taylor

Motivation:

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

$$t(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi)$$

eine lokale Approximation der Funktion im Punkt ξ durch ein Polynom 1. Grades dar.
Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist $f(x)$ durch Polynome höheren Grades (besser) zu approximieren, wenn f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt.

Satz C.137 (Taylorsche Formel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi, x \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann besitzt f die folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_n(x,\xi) + R_n(x,\xi)$$

mit dem Taylorpolynom n-ten Grades

$$T_n(x,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_n(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(\xi + \vartheta(x-\xi)\big).$$

Dabei ist ϑ eine von f, n, x, ξ abhängige Zahl mit $0 < \vartheta < 1$ und $\xi + \vartheta(x-\xi)$ eine Stelle zwischen x und ξ.

Bemerkung:

1. Für $n = 0$ liefert die Taylorsche Formel den Mittelwertsatz C.119.
2. Man kann zeigen, dass $T_n(x, \xi)$ das einige Polynom vom Grad $\leq n$ ist, das die Approximationsgüte $O((x-\xi)^{n+1}) = o((x-\xi)^n)$ besitzt.
3. Neben der Restglieddarstellung von Lagrange gibt es weitere Darstellungen des Restgliedes; z.B. die Darstellung nach Cauchy

$$R_n(x, \xi) = \frac{(1-\vartheta)^n (x-\xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}\big(\xi + \vartheta(x-\xi)\big).$$

Satz C.138

Jede auf einem offenen Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion f mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beispiel C.139

1. Sei $f(x) = e^x$, $\xi = 0$; dann ist $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das n-te Taylorpolynom von f in ξ ist

$$T_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Für das Restglied

$$R_n(x,0) = e^{\vartheta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

gilt für $|x| < c$

$$|R_n| \leq e^c \frac{|c|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Sei $f(x) = p(x)$ (Polynom vom Grad $\leq n$). Dann folgt $R_n(x,0) = 0$ für alle x, also ist $T_n(x,0) = p(x)$ für alle x.

Potenzreihen

Definition C.140

Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge. Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißen *Potenzreihen*, x_0 ihr *Entwicklungspunkt* und a_n ihre *Koeffizienten*.

Bemerkung:

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = x_0$ mit dem Wert a_0.

Beispiel C.141

1. Die Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   haben den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

   hat den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Sie konvergiert (geometrische Reihe!) für $|1-x| < 1$, also für $0 < x < 2$ mit dem Wert $\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$.

Satz C.142

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existiert eine Zahl $r \geq 0$ oder $r = \infty$, so dass die Reihe

- *für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < r$ absolut konvergiert und*
- *für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > r$ divergiert.*

Dabei heißt $r = 0$, dass sie nur für $x = x_0$ konvergiert, $r = \infty$ heißt, dass sie für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Man nennt r den Konvergenzradius der Potenzreihe, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ heißt Konvergenzintervall (für $r \neq \infty$).
Für den Konvergenzradius gilt die Cauchy-Hadamardsche Formel

$$r = \frac{1}{\limsup(\sqrt[n]{|a_n|})},$$

wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ gesetzt wird.

Bemerkung:

Über die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls, also für $|x-x_0| = r$, ist keine allgemeine Aussage möglich.

Korollar C.143

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$*. Dann konvergieren die Partialsummen*

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n (x - x_0)^n$$

gleichmäßig in jedem Intervall $[x_0 - \rho,\, x_0 + \rho]$ *mit* $0 < \rho < r$ *in folgendem Sinne:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_0 \;: \\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0 - \rho,\, x_0 + \rho].$$

Satz C.144

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_0 \; : \qquad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dann ist auch f auf $[a,b]$ stetig.

Bemerkung:

Die innere Bedingung in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit besagt, dass das Maximum der Differenz $f_k(x) - f(x)$ auf dem Intervall $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ kleiner ist als ε und das Minimum größer als $-\varepsilon$.

Oder anders ausgedrückt, der Graph von f_k liegt ganz in einem „Schlauch“ um den Graphen von f mit Radius ε.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz C.145

Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r \geq 0$ ist in jedem Punkt $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$ des Innern des Konvergenzbereiches

1. *stetig,*
2. *differenzierbar mit Ableitung $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\, a_{n+1}(x-x_0)^n$,*
3. *kann in eine Potenzreihe um x_1 entwickelt werden, der Konvergenzradius dieser neuen Potenzreihe ist größer oder gleich $r - |x_1 - x_0|$.*

Cauchy-Produkt von Reihen

Definition C.146

Das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{m=0}^{\infty} y_m$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} y_m$ mit Gliedern

$$z_n = \sum_{k+m=n} x_k y_m = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_n y_0 \,.$$

Satz C.147

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{m=0}^{\infty} y_m$ absolut konvergent, so ist auch deren Cauchy-Produkt absolut konvergent.

Bemerkung

Sind die Faktoren nur bedingt konvergent, so kann deren Cauchy-Produkt divergent sein, Beispiel

$$x_k = y_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \quad \Longrightarrow \quad |z_n| \geq 2 - \frac{2}{n+2} \geq 1 \,.$$

Cauchy-Produkt von Potenzreihen

- Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen fasst alle Summanden mit derselben Potenz zusammen.
- Das Cauchy-Produkt der Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \,.$$

- Der Konvergenzradius des Produkts ist größer als das Minimum der Konvergenzradien der Faktoren.

Beispiel C.148

$p \neq q$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^n z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} q^m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} \, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} \, z^n$$

Beispiel C.149 (Potenzreihen in verschiedenen Variablen)

1.)
$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = exp(x+y)$$

2.) für die trigonometrischen Reihen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ und } \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

zeigt man analog die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$$

Trigonometrische Funktionen

- Wende das Leibniz-Kriterium auf die Kosinusreihe an:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{für} \quad |x| < 2\sqrt{3} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{48}{49}}$$

ergibt $\cos(0) = 1$, $\cos(1) \in [\frac{1}{2}, \frac{13}{24}]$ und $\cos(2) \in [-1, -\frac{1}{3}]$.

$\Longrightarrow$ Es gibt eine Nullstelle des Kosinus in $[1, 2]$.

- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ und $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} > \frac{1}{3}x$ für $x \in [0, 2]$.

$\Longrightarrow$ cos ist auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Genau eine Nullstelle.

Def.: Das Doppelte dieser Nullstelle wird π genannt, d.h. $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

- Wegen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ist $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Mit den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned} \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 = & -\sin(x) \\ \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x) \cdot 1 - \sin(x) \cdot 0 = & \cos(x) \end{aligned}$$

und nach zwei Verdoppelungen findet man $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, d.h., 2π ist die Periode von sin und cos.

Taylorreihen

Definition C.150

Ist f auf D beliebig oft differenzierbar, so lässt sich die *Taylorreihe*

$$T_f(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

von f bezüglich ξ hinschreiben.

Bemerkung:

1. Die Taylorreihe muss weder konvergieren noch (im Fall der Konvergenz) die Summe $f(x)$ haben.
2. Nach dem Satz über die taylorsche Formel C.137 konvergiert $T_f(x,\xi)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x,\xi) = 0$ ist.

Beispiel C.151

1. Für $f(x) = e^x$, $\xi = 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für beliebiges ξ gilt

$$e^x = e^{\xi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} \qquad \text{(Funktionalgleichung!)}.$$

2. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und $\xi = 0$. Es ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n und
$T_f^n(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) = 0$ für alle n, also
$R_{n+1}(x, 0) = f(x) \nrightarrow 0$ für $n \to \infty$.
Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, lässt sich aber nicht als eine Potenzreihe darstellen.

Bemerkung:

1. Eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k, \qquad |x-\xi| < r$$

   ist bereits die Taylorreihe von f bezüglich ξ.
2. Um eine Funktion als Reihe darzustellen, müssen nicht immer die Ableitungen berechnet werden; man kann auch bekannte Reihen umformen, um die Taylorreihe zu erhalten.

Definition C.152

Eine Funktion $f(x)$ heißt am Punkt ξ *reell analytisch* falls sie dort unendlich oft differenzierbar ist und ihre Taylorreihe $T(x, \xi)$ für alle x aus einer Umgebung von ξ gegen $f(x)$ konvergiert.

Bemerkung:

1. Für jedes ξ bildet die Menge dieser Funktionen einen Ring, d.h. Summen, Differenzen und Produkte haben diesselbe Eigenschaft.
2. Die Verkettung (Verknüpfung) von zwei analytischen Funktionen ist wieder eine analytische Funktion.

C - 6 Fixpunkt-Iteration

Motivation:

Iterationsverfahren sind Verfahren der schrittweisen Annäherung. Sie gehören zu den wichtigsten Methoden in der Numerik zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen, z.B. Bisektionsverfahren.
Verfahren zur iterativen Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, haben meistens die Form

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots \text{ (FPI).}$$

und heißen Fixpunkt-Iterationen mit Verfahrensfunktion ϕ.

Die Bezeichnung Fixpunkt-Iteration ist wie folgt begründet:
Erzeugt die Iterationsvorschrift (FPI) eine konvergente Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und ist ϕ stetig, so folgt:

$$x^* := \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \phi(x^*).$$

Das Verfahren konvergiert also und der Grenzwert x^* hat die Eigenschaft $x^* = \phi(x^*)$ und ist damit ein Fixpunkt der Verfahrensfunktion ϕ.
Wie gewinnt man die Verfahrensfunktion ϕ?
Man formt die Gleichung $f(x) = 0$ in eine äquivalente Gleichung der Form $x = \phi(x)$ um. Dies kann auf vielfältige Art geschehen und hat großen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Fixpunkt-Iteration.

Definition C.153

Eine Abbildung $\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf D, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass:

$$\forall x, y \in D : |\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

L heißt *Lipschitz-Konstante*.
Kann man $L < 1$ wählen, so heißt die Abbildung ϕ kontrahierend und L nennt man dann auch Kontraktionskonstante von ϕ.

Bemerkung:

1. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig auf D.
2. Man beachte, dass die Kontraktionseigenschaft nur durch eine Abschätzung $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$ mit $L < 1$ gesichert ist.

Satz C.154

Falls eine Funktion ϕ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist, so besitzt sie die Lipschitz-Konstante

$$L = \sup\{|\phi'(\xi)| : a \leq \xi \leq b\}.$$

Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|\phi(y) - \phi(x)| = |\phi'(\xi)(y - x)| = |\phi'(\xi)|\,|y - x| \leq L\,|y - x|$$

mit $\xi \in (a, b)$.

Satz C.155 (Banachscher Fixpunktsatz)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung von D in sich (d.h., $\phi(D) \subseteq D$) mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) *Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von ϕ in D.*

(b) *Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*.*

(c) *Es gelten die Fehlerabschätzungen:*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

(Die linke Ungleichung heißt a posteriori und die rechte – a priori Abschätzungen)

Beispiel: Finde die positive Lösung von $0 = f(x) = x^3 - x - 1$.

Betrachte dazu die Fixpunktfunktion $\phi(x) = \sqrt[3]{1+x}$ auf $D = [1, +\infty)$. Offensichtlich ist $\phi(D) \subset D$.

Für die Kontraktionskonstonstante rechnet man

$$L = \sup_{x \geq 1} |\phi'(x)| = \sup_{x \geq 1} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} < 1$$

Die ersten Schritte einer numerischen Iteration sind:

k	x_k	$f(x_k)$	a-posteriori
0	$1,000000000000$	$-1,000000000000$	$0,389881574842$
1	$1,259921049895$	$-0,259921049895$	$0,078559180183$
2	$1,312293836683$	$-0,052372786788$	$0,015089973683$
3	$1,322353819139$	$-0,010059982456$	$0,002872388119$
4	$1,324268744552$	$-0,001914925413$	$0,000545821049$
5	$1,324632625251$	$-0,000363880699$	$0,000103684889$
6	$1,324701748510$	$-0,000069123259$	$0,000019694896$
7	$1,324714878441$	$-0,000013129931$	$0,000003740992$
8	$1,324717372436$	$-0,000002493995$	$0,000000710590$
9	$1,324717846162$	$-0,000000473726$	$0,000000134974$

Bemerkung:

- Die Bedingungen des Satzes C.155 sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, sowie für die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.
- Die Bedingung $L < 1$ des Satzes C.155 ist wesentlich. Denn die Funktion

$$\phi(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}, \quad \text{für} \quad D = \{x \geq 0\}$$

ist zwar schwachkontrahierend ($|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y|$), es existiert hier aber kein Fixpunkt.

Newton-Verfahren

Motivation:

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrungsfunktion ϕ ab.
Eine geschickte Wahl von ϕ führt auf das Newton-Verfahren. Dieses beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert schnell, falls es konvergiert.

Verfahren:

Wir suchen eine Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Das Newton-Verfahren besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.

Die Tangente an f im Punkt x_0 ist das Taylorpolynom 1-ter Ordnung

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist in x_1 mit $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$, also in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Als allgemeine Iterationsvorschrift haben wir dann:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Beispiel C.156

Wir wollen die Nullstelle von $f(x) = x + \mathbf{e}^x$ bestimmen und wählen den Startwert $x_0 = 0$ (es ist $f'(x) = 1 + \mathbf{e}^x$):

ν	x_ν	$f(x_\nu)$	$f'(x_\nu)$
hline 0	$0,000000000000$	$1,000000000000$	$2,000000000000$
1	$-0,500000000000$	$0,106530659713$	$1,606530659713$
2	$-0,566311003197$	$0,001304509806$	$1,567615513003$
3	$-0,567143165035$	$0,000000196480$	$1,567143361515$
4	$-0,567143290410$	$0,000000000000$	$1,567143290410$

Also hat $f(x) = x + \mathbf{e}^x$ eine Nullstelle bei $x_4 = -0,567143290410$. Man beachte die Genauigkeit $|f(x_4)| < 0,000000000001$.

Bemerkung:

Das Verfahren konvergiert nicht immer, im allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 “hinreichend nahe” bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).
Einen wichtigen Fall, in dem Konvergenz auftritt, enthält der folgende Satz:

Satz C.157 (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:

(a) *Die Funktion f hat genau eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.*

(b) *Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

(c) *Ist $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Bemerkung:

1. Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.
2. Die Fehlerabschätzung unter (c) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt. Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_{n+1} auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.

C-7 Integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Das bestimmte Integral

Motivation:

Eine weitere zentrale Frage der Analysis ist die nach dem Inhalt der Fläche, die zwischen der x-Achse, dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (abgeschlossenes, beschränktes Intervall) und den vertikalen Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ liegt.

Definition C.158

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Unter einer *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ versteht man eine geordnete Menge von endlich vielen Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

(b) Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max\{x_\nu - x_{\nu-1} : 1 \leq \nu \leq n\}$ die *Spanne* (beziehungsweise *Feinheit*) von $\mathcal{Z}$.

(c) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}_1$ ist eine feinere Zerlegung als (bzw. Verfeinerung von) $\mathcal{Z}_2$ ($\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1$), falls $\mathcal{Z}_1$ durch Hinzunahme weiterer Knoten zu $\mathcal{Z}_2$ entsteht.

Definition C.159 (Riemann-Summe)

(a) Summen der Form

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \text{ mit } \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

heißen *Riemann-Summen* einer Funktion f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

(b)

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\inf_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \Big) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Untersumme* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

(c)

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\sup_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \Big) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Obersumme* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Lemma C.160

1. *Für fixierte Zerlegungen $\mathcal{Z}$ ist $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.*
2. *Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:*
   $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2 \quad \Longrightarrow \quad U_f(\mathcal{Z}_2) \geq U_f(\mathcal{Z}_1)$ *und* $O_f(\mathcal{Z}_2) \leq O_f(\mathcal{Z}_1)$.
3. *Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ eines Intervalls gibt es immer eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{Z}''$ mit $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}''$ und $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}''$*
4. *Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ eines Intervalls ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$; insbesondere ist die Menge der Obersummen (Untersummen) nach unten (oben) beschränkt.*

Definition C.161 (Riemann-Integral)

- Wegen der letzten Eigenschaft existieren die Grenzwerte

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,dx := \sup_{\mathcal{Z}\, Zerlegung von [a,b]} U_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Unterintegral}$$

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx := \inf_{\mathcal{Z}\, Zerlegung von [a,b]} O_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Oberintegral}$$

- f(x) heißt *(Riemann-)integrierbar* über [a, b], wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen.
  Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx$$

das Riemann-Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.

Beispiel C.162

1. Sei $f(x) = c = const$ auf $[a, b]$.
   Dann ist

$$U_f(\mathcal{Z}) = O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} c(x_\nu - x_{\nu-1}) = c(b-a)$$

   für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

2. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \textit{Dirichletsche Sprungfunktion.}$$

   Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist $U_f(\mathcal{Z}) = 0$ und $O_f(\mathcal{Z}) = 1$.
   Somit ist $f(x)$ nicht Riemann-integrierbar.

Definition C.163 (Flächenberechnung)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

als *Fläche* zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$ bezeichnet.

Bemerkung:

1. Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)|\, dx$ definieren.
2. Ist $b < a$, so definiert man $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$.

Satz C.164 (Monotonie des Riemann-Integrals)

Sind f und g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bemerkung:

Als Folgerungen aus der Monotonie erhalten wir:

1. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,
2. Wenn $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Satz C.165 (Rechenregeln für das Riemann-Integral)

Es seien f, g Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

1. *$f + g$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *αf ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Gilt $a \leq c \leq b$, so ist f Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$, und es ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Satz C.166 (Riemannsches Kriterium)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist integrierbar über $[a, b]$.*

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ derart, dass gilt:*

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \varepsilon.$$

Satz C.167 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ monoton ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Definition C.168 (gleichmäßig stetig)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

Satz C.169 (von Heine-Cantor (Heine 1872))

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Intervall stetig. Dann ist f schon auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

Satz C.170 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ stetig ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Satz C.171

Sei f integrierbar auf $[a, b]$, $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ und $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $h \circ f$ integrierbar auf $[a, b]$.

Bemerkung:

Der Beweis ist kompliziert. Es genügt nicht, dass h integrierbar auf $[c, d]$ ist. Wir betrachten etwa die auf $[0, 1]$ integrierbaren Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0, 1],\ \frac{p}{q} \text{ gekürzt.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Aber die Verkettung ist nicht Riemann-integrierbar

$$(h \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

Aus Satz C.171 folgt

Satz C.172

Es seien f, g integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist

$$f \cdot g \text{ integrierbar auf } [a, b].$$

Satz C.173 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Mit $g \equiv 1$ folgt

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi) \quad \text{mit } a \leq \xi \leq b.$$

Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion

Definition C.174

Man nennt eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion F eine *Stammfunktion* von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstante C eine Stammfunktion von $f(x)$.

Satz C.175

Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F(x) = G(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ für alle $x \in I$.

Satz C.176

Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leq x \leq b).$$

stetig auf $[a, b]$.

Ist f zusätzlich in $x_0 \in [a, b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar mit

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist F Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

Satz C.177 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

Bemerkung:

Integrierbarkeit erweist sich in gewisser Weise als Umkehrung der Differentiation:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \Longrightarrow \quad \Big(\int f\Big)' = f$$

und

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}, F' \in R([a, b]) \quad \Longrightarrow \quad \int F' = F.$$

Definition C.178 (Unbestimmtes Integral)

Eine Stammfunktion F von f wird auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet und man schreibt

$$F = \int f \qquad \text{oder} \qquad F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt! (Vergleiche Satz C.175.)

Bemerkung:

Nicht jede integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion und die Existenz einer Stammfunktion F von f sichert nicht die Integrierbarkeit von f.

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale. Hierzu gibt es zwei Grundtechniken:

Satz C.179 (Substitutionsregel)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \to D$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f\left(g(t)\right) g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Satz C.180 (Partielle Integration)

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Bemerkung zur Substitutionsregel:

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, diesen Satz anzuwenden:

1.) Der Integrand ist von der Form $f\left(g(t)\right) g'(t)$ oder läßt sich auf diese Form bringen. Zum Beispiel ist

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -f\left(g(t)\right) g'(t)$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}, g(t) = \cos t, g'(t) = -\sin t$.

2.) Zur Berechnung von $\int f(x)\, dx$ substituieren wir $x = g(t)$ mit einer geeigneten, umkehrbaren Funktion $g(t)$; dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, $dx = g'(t)\, dt$ und es entsteht das Integral

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = H(t) + c,$$

wobei H eine Stammfunktion von $h := f \circ g$ ist.

Bemerkung zur Substitutionsregel (Forts.):

Rücksubstitution $t = g^{-1}(x)$ liefert

$$\int f(x)\,dx = H\big(g^{-1}(x)\big) + c.$$

Beispielsweise zur Berechnung von $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ für $0 < a < 1$ substituieren wir $x := g(t) = \sin t$ (dann ist $t = \arcsin x = g^{-1}(x)$), $dx = \cos t\,dt$ und erhalten

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(a)} f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\arcsin a} \frac{1}{|\cos t|}\,\cos t\,dt$$

(wegen $0 \le x < a < 1$ ist $0 \le t = \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos t \ge 0$ und somit)

$$= \int_0^{\arcsin a} 1\,dt = \arcsin a.$$

Rationale Integranden – Partialbruchzerlegung

Zu rationalen Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome) läßt sich immer eine explizite Stammfunktion finden.

Einfachster Fall: $P(x) = 1$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Substituiere $\gamma\, u = 2ax + b$, $\gamma = \sqrt{|b^2 - 4ac|}$ (falls $\gamma \neq 0$)

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{2}{\gamma} \int \frac{1}{u^2 \pm 1}\, du,$$

daraus folgt (mit $1 = \frac{1}{2}((u+1) - (u-1))$)

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{|b^2-4ac|}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|b^2-4ac|}}\right) & b^2 < 4ac \\ \frac{-2}{2ax+b} & b^2 = 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{|b^2-4ac|}} \ln\left|\frac{2abx+b-\sqrt{|b^2-4ac|}}{2abx+b+\sqrt{|b^2-4ac|}}\right| & b^2 > 4ac \end{cases}$$

Setze nun voraus, dass Q, $\deg Q = n$ genau n verschiedene einfache Nullstellen hat, n_r reelle und $(n - n_r)/2$ konjugiert komplexe Paare. Dann zerfällt Q in lineare und quadratische reelle Faktoren

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n_r} (x - \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{(n-n_r)/2} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)$$

mit $\lambda_j, \gamma_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ und $4\gamma_j > \beta_j^2$.

Es existieren eindeutig bestimmte Zahlen $A_j, B_j, C_j \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n_r} \frac{A_j}{(x - \lambda_j)} + \sum_{j=1}^{(n-n_r)/2} \frac{B_j x + C_j}{x^2 + 2\beta_j x + \gamma_j}$$

Zu jedem der Summanden kann eine Stammfunktion explizit angegeben werden.

Beispiel:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+x-1}{x^3+x} \qquad \text{Nenner faktorisieren}$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)} \qquad \text{Ansatz einsetzen}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \text{mit Nenner multiplizieren}$$

$$x^2+x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$= (A+B)x^2 + Cx + A \qquad \text{Koeffizientenvergleich}$$

$$\Rightarrow A = -1 \quad C = 1 \quad B = 2$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = -\log|x| + \log|x^2+1| + \arctan(x)$$

Uneigentliche Integrale

Motivation:

Es treten häufig Integrale auf, bei denen

- der Integrand nicht beschränkt ist.

  Beispiel: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

- das Integrationsintervall kein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

  Beispiel: $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

Solche Integrale werden *uneigentlich* genannt.

Definition C.181 (Uneigentliche Integrationsgrenzen)

Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert.
Man nennt dann das Integral *konvergent* und f auf $[a, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*.
Analog erklärt man Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ für $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$.
Schließlich setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ für } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Definition C.182 (Konvergenz)

Seqi $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar und in a nicht definiert.
Falls $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x)\, dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Eine analoge Definition gilt, falls $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ in b nicht definiert, aber auf inneren Approximationen integrierbar ist:

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Schließlich setzt man

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^a f(x)\, dx \quad \text{für } f : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Interpolation von $n!$

Definition C.183

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

Satz C.184

1. *Es gilt die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^+).$$

2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}_0$.

Integralkriterium für Reihen

Einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz bestimmter Reihen und entsprechender Integrale liefert das folgende Kriterium. Es wird verwendet, dass für monoton fallende Funktionen gilt

$$f(k) \;\geq\; \int_k^{k+1} f(x)\,dx \;\geq\; f(k+1)\,.$$

Satz C.185 (Riemannsches Integralkriterium für Reihen)

Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \;\; \textit{konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{\infty} f(t)\,dt \;\; \textit{konvergiert.}$$

Monotonie ist wichtig

- $f(x) = x \cdot \sin^2(\pi x)$.
  Dann ist $f(n) = n \cdot \sin^2(n\pi) = 0$, aber $\int_0^\infty f(x)\,dx$ divergiert.

- Mit
  $$f(x) = \sum_{n=0\infty} \max\left(0, 1 - 2^{n+1}|x - n|\right)$$
  (schmaler werdende Zackenfolge[1]) ist $\int_0^\infty f(x)\,dx$ endlich, aber $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

[1] gleichschenklige Dreiecke der Höhe 1 und Breite 2^{-n} über $x = n$

C - 8 Zusammenfassung

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen geordneten Körper, der bezüglich der Supremums und Infimumsbildung abgeschlossen ist. Damit ist $\mathbb{R}$ vollständig, d.h., jede Cauchyfolge von reellen Zahlen besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind nicht vollständig, die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ sind nicht mehr geordnet.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, d.h. gleichmächtig zu ihrer Untermenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen in jedem offenen Interval (a, b) mit $a < b$ sind bereits überabzählbar.
- Jede rationale Zahl hat eine endliche oder periodische Dezimal- und Binärdarstellung.
- Sowohl die rationalen $\mathbb{Q}$ wie die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$.

Konvergenz von Folgen, Satz C.47, C.66

- Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
- Eine monoton wachsende Folge konvergiert, wenn sie nach oben beschränkt ist, sonst heißt sie uneigentlich konvergent gegen ∞.
- Liegt eine Folge zwischen zwei konvergierenden Folgen mit demselben Grenzwert c, so konvergiert sie auch gegen c.

Erweiterung

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt.

Konvergenz von Reihen

- Konvergenz der Reihe $\iff$ Partialsummen der Reihenglieder a_n konvergieren als Folge.
- Absolute Konvergenz $\iff$ Reihe der $|a_n|$ konvergiert $\iff$ jede beliebige Umordnung konvergiert zu selbem Grenzwert.

- **Majorantenkriterium**:
  Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n| \leq c_n$ für konvergente Folge c_n.
- **Quotientenkriterium**:
  Absolute Konvergenz folgt aus $\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- **Wurzelkriterium**:
  Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- **Leibniz-Kriterium**:
  Bedingte Konvergenz folgt aus $a_n a_{n-1} < 0$ und $|a_n|$ monotone Nullfolge.

Grenzwerte von Funktionen

- Grenzwert $c = \lim_{x \to z} f(x)$, wenn sie durch die Setzung $f(x_0) = c$ dort stetig wird. (Sie muss ohnehin für alle x nahe z definiert sein).
- Monoton wachsende Funktionen $f(x)$ haben immer einen Grenzwert $c = \lim_{x \to \infty} f(x)$, der uneigentlich heißt, wenn $c = +\infty$ ist.
- Besonders wichtig sind für $y = f(x)$ die Grenzwerte der Differentialquotienten

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{x \to z}{\longrightarrow} f'(z) = \frac{dy}{dx} \, ,$$

welche bei Existenz die Ableitung von f an der Stelle z ergeben.

Kombination von Grenzwerten

- Haben zwei Folgen oder Funktionen an derselben Stelle die Grenzwerte a und b, so haben die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten der Folgen bzw. Funktionen die Grenzwerte $a + b$, $a - b$, $a * b$ und a/b. Die Grenzwertbildung ist also ein Ringhomomorphismus.
- Hierbei gelten für endliches $c > 0$ folgende „uneigentliche" Regeln

$$\pm\infty + c = \pm\infty, \; \pm\infty * c = \pm\infty, \; c/\infty = 0, \text{ und } c/0 = \pm\infty$$

  Im letzten Falle muss die Konvergenz des Nenners monoton sein.
- Während die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 * \infty$ unbestimmt bleiben können ∞/∞ und $0/0$ durch geeignetes Kürzen und bei Funktionen mit der Regel von de l'Hôpital, d.h. durch eventuell wiederholtes simultanes Differenzieren von Zähler und Nenner ausgewertet werden. Die letzten Ableitungen müssen konvergieren.

Vererbung von Funktionseigenschaften

- Stetigkeit und (wiederholte) Differenzierbarkeit von Funktionen auf einem vorgegebenen offenen Intervall (a, b) vererben sich auf deren Summen, Differenzen und Produkte und Quotienten, vorausgesetzt, die Nennerfunktion hat dort keine Nullstellen. Dasselbe gilt für bestimmte Riemann-Integrierbarkeit in geschlossenen Intervallen $[a, b]$. Alle diese Mengen bilden reelle Vektorräume unendlicher Dimension.
- Differentiation und unbestimmte Integration, bei der die obere Grenze variabel ist, sind bis auf eine additive Konstante zueinander inverse Operatoren. Sie sind beide linear, d.h. Vektorraumhomomorphismen. Die Differentiation und Integration von Produkten erfolgt mit Hilfe der Produktregel bzw. partieller Integration.

Mittelwertsätze

- **Stetige Funktion**:
  Jeder Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird an einer Stelle c zwischen a und b angenommen.
- **Differenzierbare Funktion(en)**:
  Der Differenzenquotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wird als Wert der Ableitung $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a,b)$ angenommen.
  Der Quotient der Funktionsdifferenzen $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ist gleich dem Quotient der Ableitungen $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ an einer Zwischenstelle $c \in (a,b)$.
- **Integrierbare stetige Funktion**:
  Das bestimmte Integral von f zwischen a und b ist gleich $b-a$ mal dem Funktionswert $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a,b)$.

Zusammengesetzte Funktionen

- Vorausgesetzt, $z = g(y)$ ist auf allen Werten $y = f(x)$ für $a \leq x \leq b$ definiert, so erhält man die Komposition
$$z = h(x) \equiv g(f(x)) = [g \circ f](x) \ (\neq \ [f \circ g](x) \ !!!!)$$
- Sind g und f beide stetig oder beide sogar differenzierbar, so gilt dies auch für h. Im zweiten Falle ergibt sich die Ableitung nach der Kettenregel zu
$$h'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = g'(f(x))\,f'(x) \quad .$$
- Ist g stetig und f Riemann-integrierbar, so gilt letzteres auch für $h(x)$.
- Gibt es eine Funktion g, so dass $h(x) = [g \circ f](x) = x$ für alle $x \in [a, b]$, dann heißt $x = g(y)$ die Inverse oder Umkehrfunktion von f. Ist f auf $[a, b]$ streng monoton, so existiert eine Umkehrfunktion g mit Definitionsbereich $f([a, b])$. Ist f zusätzlich stetig, so auch g. Ist f differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist g in $y = f(x)$ differenzierbar mit Ableitung