Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Andreas Griewank Ph.D.
Dr. Thomas M. Surowiec
Dr. Fares Maalouf

Analysis I – Mathematik für InformatikerInnen II – SoSe 12

Musterlösungen zur Prüfungsklausur vom 18. Juli 2012

Aufgabe 1: *4 Punkte*

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit „Ja“ oder „Nein“ und begründen Sie ihre Antwort. Falls die Aussage falsch ist, dann reicht ein Gegenbeispiel.

a) Alle beschränkten Funktionen sind Riemann-integrierbar.

b) Alle konvergenten Folgen reeller Zahlen sind Cauchy-Folgen.

c) Alle Polynome mit rationalen Koeffizienten haben rationale Nullstellen.

d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Nein. Ein Gegenbeispiel ist die Dirichlet-Funktion erster Art, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ rational} \\ 1 & \text{wenn } x \text{ irrational} \end{cases},$$

da diese in jedem Intervall einer Zerlegung das Maximum 1 und das Minimum 0 annimmt.

b) Ja. Denn in einer konvergenten Folge läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden, so dass alle Glieder mit höherem Index in einem Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ um den Grenzwert a liegen. Damit haben diese Glieder einen Abstand kleiner 2ε untereinander, was das Kriterium für eine Cauchy-Folge ist.

c) Nein. Offensichtliche Beispiele sind $x^2 - 2$ mit irrationalen Nullstellen, $x^2 + 2$ mit gar keiner Nullstelle und 0 als konstantes Polynom, welches alle Zahlen als Nullstellen hat.

d) Nein. Trotz langer Formulierung genügt das kurze Gegenbeispiel $a_n = \frac{1}{n}$, d.h. die harmonische Reihe, die alle Eigenschaften erfüllt, aber trotzdem divergiert.

Aufgabe 2: *3 Punkte*

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}{3}\,.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3 - 1}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Erste Variante: klassischer Induktionsbeweis.

Induktionsanfang Sei $n = 1$. Dann ist die linke Seite 1 und rechts $\frac{1(1+1/2)(1+1)}{3} = 1$.

Induktionsschritt Induktionsvoraussetzung Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}{3}$.

Induktionsbehauptung Es gilt ebenfalls $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\,(n+\frac{3}{2})\,(n+2)}{3}$.

Induktionsbeweis Setze in die linke Seite der Induktionsbehauptung die Induktionsvoraussetzung ein:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}{3} + (n+1)^2$$

gemeinsame Faktoren ausklammern

$$\begin{aligned} &= \frac{n+1}{3}\,\Big(n\,(n+\tfrac{1}{2}) + 3(n+1)\Big) \\ &= \frac{n+1}{3}\,\Big(n^2 + \tfrac{7}{2}n + 3\Big) \end{aligned}$$

$n = -2$ ist, wie die Behauptung erfordert, ein Teiler des zweiten Faktors

$$= \frac{n+1}{3}\,\Big((n+2)(n-2) + 4 + \tfrac{7}{2}(n+2) - 7 + 3\Big) \qquad = \frac{(n+1)\,(n+2)}{3}\,\Big(n - 2 + \tfrac{7}{2}\Big) = \frac{(n+1}{}$$

was die rechte Seite der Induktionsbehauptung ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zweite Variante: Sei $b_n = \frac{1}{3}n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)$ die rechte Seite. Bestimme die Differenz aufeinanderfolgender Glieder

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{3}n\,(n+\tfrac{1}{2})\,(n+1) - \frac{1}{3}(n-1)\,(n-\tfrac{1}{2})\,n \\ &= \frac{n}{3}\,\Big(n^2 + \tfrac{3}{2}n + \tfrac{1}{2} - n^2 + \tfrac{3}{2}n - \tfrac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{n}{3}\,(3n) = n^2. \end{aligned}$$

Also kann man die linke Seite als Teleskopsumme schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0 = \frac{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}{3} - 0$$

was die Behauptung beweist.

b) Nach Einsetzen der ersten Teilaufgabe (mit oberer Grenze $n-1$) verbleibt ein Bruch zweier Polynome vom Grad 3 in n. Den Grenzwert bestimmt man, indem man zuerst durch den dominanten Term des Nenners kürzt, also hier durch n^3:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}(n-1)\,(n-\frac{1}{2})\,n}{n^3-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{1}{2n})}{3(1-\frac{1}{n^3})} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

da die Grenzwerte der einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner existieren (und der Grenzwert des Nenners nicht Null ist).

Aufgabe 3: *4 Punkte*

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe, beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen.

a) Finden Sie Beispiele für konvexe f und g, deren Produkt $f \cdot g$ nicht konvex ist.

b) Geben Sie Bedingungen an f und g an, unter denen das Produkt $f \cdot g$ immer konvex ist.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Gesucht war ein Beispiel für das Paar von Funktionen (f, g). Einfach einsichtige Varianten sind $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ oder $f(x) = -1$, $g(x) = x^2$, da auch lineare bzw. konstante Funktionen konvex (und gleichzeitig konkav) sind.

Eine weitere Möglichkeit ist $f(x) = g(x) = x^2 - 1$, da $f(x)\,g(x) = (x^2-1)^2 = (x-1)^2\,(x+1)^2$ zwei strenge lokale Minima in den doppelten Nullstellen $x = \pm 1$ hat. Deren Verbindungsstrecke liegt offensichtlich nicht über dem Graphen des Produkts, speziell ist $f(0)\,g(0) = 1 > 0$.

b) Die zweite Ableitung des Produkts ist $(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$. Diese ist offensichtlich positiv, wenn alle Summanden positiv sind, und das wird erreicht, wenn alle Faktoren in den Summanden positiv sind. Sind also f und g positiv, streng monoton wachsend und konvex, so ist auch deren Produkt konvex.

Aufgabe 4: *4 Punkte*

Es seien (a_n), (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{genau dann konvergiert, wenn auch} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{konvergiert.}$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Aus der Grenzwertdefinition folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \iff (1-\varepsilon)b_n < a_n < (1+\varepsilon)b_n$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und mache die rechte Seite etwas gröber, so dass

$$\frac{1}{2}b_n < a_n < 2b_n\,.$$

Daraus folgt, dass für den Reihenrest ab Index n_0 die Folge $(2b_n)$ eine Majorante für (a_n) ist, und $(2a_n)$ eine Majorante für (b_n). Nach dem Majorantenkriterium folgt aus dieser gegenseitigen Beschränkung schon die Äquivalenz der Konvergenz der Reihen.

Aufgabe 5: *4 Punkte*

Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{3^k+1}(2x-7)^k$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^{2k}$.

D.h. bestimmen Sie die Mengen der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihen jeweils absolut konvergieren.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{3^k+1}(2x-7)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k^2}{3^k+1}(x-\tfrac{7}{2})^k$;

Mit Quotientenkriterium für Zahlenreihen, $a_k = \frac{k^2}{3^k+1}(2x-7)^k$. Dann ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2(3^k+1)(2x-7)^{k+1}}{k^2(3^{k+1}+1)(2x-7)^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1+3^{-k}}{3+3^{-k}}(2x-7)$$

$$\implies q(x) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{3}\,|2x-7|$$

Absolute Konvergenz gilt, wenn $q(x) < 1$, also wenn $|2x-7| < 3$ gdw. $4 < 2x < 10$ gdw. $x \in (2,5)$. In den Intervallenden erhält man Reihen, deren Glieder wie k^2 wachsen, also Divergenz.

Mit der Wurzelformel (Cauchy-Hadamard) für Potenzreihen. Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = \frac{7}{2}$ und die Koeffizientenfolge ist $c_k = \dfrac{2^k k^2}{3^k + 1}$. Dann ist

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{\frac{2^k k^2}{3^k + 1}} = \frac{2}{3} \sqrt[k]{\frac{k^2}{1 + 3^{-k}}}$$

$$\implies r^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{2}{3}$$

Benutzt wurden $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C} = 1$ für jede Konstante $C > 0$ und $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ sowie das Quetschlemma mit der Einschachtelung $1 \leq 1 + 3^{-k} \leq 2$, also

$$1 \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1 + 3^{-k}} \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} x^{2k}$.

In dieser Potenzreihe sind die Koeffizienten zu Potenzen ungeraden Grades Null. Um trotzdem den Quotienten betrachten zu können, betrachtet man die Reihe entweder als Zahlenreihe mit Parameter x und $a_k = \binom{2k}{k} x^{2k}$ oder substituiert $y = x^2$, um eine lückenlose Potenzreihe in y mit Koeffizienten $c_k = \binom{2k}{k}$ vor y^k zu erhalten.

Quotientenkriterium der Zahlenreihe (zweite Variante analog):

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+2)!\, k!^2\, x^{2k+2}}{(2k)!\, (k+1)!^2\, x^{2k}} = \frac{(2k+2)(2k+1)\, x^2}{(k+1)^2} = \frac{2(2k+1)}{k+1} x^2 = 4 \frac{1 + \frac{1}{2k}}{1 + \frac{1}{k}} x^2$$

$$\implies q(x) = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 4\, x^2$$

Absolute Konvergenz liegt also vor für $q(x) < 1$, also $x^2 < \frac{1}{4}$, also $|x| < \frac{1}{2}$. Die Betrachtung der Konvergenz am Rand geht über die verfügbaren Mittel hinaus.

Wurzelformel: Um den Ausdruck $\sqrt[k]{k!}$ zu beherrschen, benutze die Stirlingsche Formel

$$k! = C_k \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad \text{mit} \quad C_k \sim \sqrt{2\pi k}$$

Dann ist wieder $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} = 1$ und

$$\binom{2k}{k} = \frac{C_{2k}}{C_k^2} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \left(\frac{k}{e}\right)^{-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} 4^k$$

woraus sich wieder der Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $x_0 = 0$ ergibt. In den Intervallenden hebt sich der Faktor 4^k gegen $(\pm\frac{1}{2})^{2k}$ auf und es ergibt sich beidesmal eine Reihe, deren Glieder proportional zu $\frac{1}{\sqrt{k}}$ sind. Nach Betrachtung der allgemeinen harmonischen Reihe divergiert diese Reihe.

Aufgabe 6: *4 Punkte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x\,\sin x}{1+\cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x\,\sin x}{1+\cos x}$.

Man kann mit $(1-\cos x)$ erweitern zu

$$\frac{x\,\sin x}{1+\cos x} = \frac{x\,\sin x\,(1-\cos(x))}{1-\cos^2 x} = \frac{x\,(1-\cos(x))}{\sin x}$$

und erhält einen Zähler, der gegen 2π konvergiert, während der Nenner in $x=\pi$ eine einfache Nullstelle hat, einen Wechsel von positiven zu negativen Werten. Im einseitigen Grenzwert $x\to\pi\pm 0$ ergibt sich also bestimmte Divergenz zu $\mp\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$.

Einsetzen des quadratischen Taylorpolynoms $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\,R(x)$ (mit R stetig) ergibt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^3\,R(x)}{x(x+\frac{1}{2}x^2+x^3\,R(x))} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+frac12x+x^2\,R(x))}$$

woraus sich der Grenzwert $\frac{1}{2}$ ablesen läßt.

Alternativ: Zweimaliges Anwenden der Formel von l'Hôpital führt zu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 7: *6 Punkte*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale bzw. Stammfunktionen:

a) $\int e^{-x} \sin x \, dx;$ b) $\int \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} \, dx.$

Lösung zu Aufgabe 7:

a) $\int e^{-x} \sin x \, dx$

Benutze zweimalige partielle Integration mit Integration des ersten und Differentiation des zweiten Faktors

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin x \, dx &= (-e^{-x}) \sin x - \int (-e^{-x}) \cos x \, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx \\ &= -e^{-x} \sin x + (-e^{-x}) \cos x - \int (-e^{-x}) (-\sin x) \, dx \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx \\ \Longrightarrow 2 \int e^{-x} \sin x \, dx &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \\ \Longrightarrow \int e^{-x} \sin x \, dx &= -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C\end{aligned}$$

Alternativ: Vermute eine Stammfunktion der Form $F(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + C$ und gleiche deren Ableitung mit dem Integranden ab:

$$F'(x) = -e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-x}(-A \sin x + B \cos x) = -e^{-x}((A - B) \cos x + (A + B) \sin x)$$

$$\Longrightarrow A - B = 0 \wedge A + B = -1 \Longrightarrow A = B = -\frac{1}{2}$$

b) $\int \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} \, dx.$

Substituiere $u = e^x$, dann ist $du = e^x \, dx$ oder $dx = \frac{1}{u} \, du$ und

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} \, dx &= \int \frac{u + 1}{u + u^{-1}} \frac{du}{u} = \int \frac{u + 1}{u^2 + 1} \, du \\ &= \int \frac{u}{u^2 + 1} \, du + \int \frac{1}{u^2 + 1} \, du = \frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| + \arctan(u) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \arctan(e^x) + C\end{aligned}$$

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \,.$$

Lösung zu Aufgabe 8:

Verwende das Integralkriterium mit der Funktion $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln x)^2}$. Der Nenner besteht aus positiven streng monoton wachsenden Faktoren, ist also selbst streng monoton wachsend, f also positiv streng monoton fallend. Die Reihe ist daher genau dann konvergent, wenn das (uneigentliche) Integral über f endlich ist.

$$\begin{aligned}
&\int f(x)\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}\,dx = -\frac{1}{\ln x} + C \\
\Longrightarrow\ &\int_2^N f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln N} + \frac{1}{\ln 2} \\
\Longrightarrow\ &\int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_2^N f(x)\,dx = \frac{1}{\ln 2} < \infty \,.
\end{aligned}$$