Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Andreas Griewank Ph.D.
Dr. Thomas M. Surowiec
Dr. Fares Maalouf

Übungsaufgaben Mathematik für InformatikerInnen II (SoSe 12)

Serie 2

Die Abgabe erfolgt zu am 30.04.2012 um 12:00 Uhr.

---

1. (2 Punkte) Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und rationale Zahlen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Man beweise: Die Menge $A \subset \mathbb{R}$ aller algebraischen Zahlen ist abzählbar. *Hinweis* Man zeige dazu, dass die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist und benutze (ohne Beweis), dass ein Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen hat.

2. (2 Punkte) Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^*$ und natürliche Zahlen $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$, zeigen Sie mithilfe der Definition der n-ten Wurzel sowie der Körperaxiome, dass die folgende Gleichheit gilt:

$$x^{\frac{n}{m}} x^{\frac{n'}{m'}} = x^{\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'}}.$$

3. (2 Punkte) Die Folgen u_n und v_n seien definiert durch:

$$u_n := \frac{1}{n^2+1}, \quad v_n = \frac{n^2 - 25}{n^2+1}.$$

(a) Finden Sie eine natürliche Zahl N (bzw. M), sodass für jedes $n \geq N$ (bzw. $n \geq M$) $|u_n| < \frac{1}{100}$ (bzw. $|v_n - 1| < \frac{1}{350}$) ist.

(b) Beweisen Sie mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$.

4. (2 Punkte) Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

(c) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass jede Gruppe von maximal drei StudentInnen eine Serie abgeben sollte,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

v) Alle elektronischen Lösungen sollen an math4inf@math.hu-berlin.de geschickt werden.