Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Andreas Griewank Ph.D.
Dr. Thomas M. Surowiec
Dr. Fares Maalouf

Übungsaufgaben Mathematik für InformatikerInnen II (SoSe 12)

Serie 4

Die Abgabe erfolgt zu am 14.05.2012 um 15:00 Uhr.

---

1. (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz, bzw. Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

2. (2 Punkte) Es sei (x_k) eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{1+x_k}$ konvergiert.

3. (2 Punkte) Es sei (x_k) eine Folge reeller Zahlen mit $|x_k| \leq M$ für alle $k \geq 0$, wobei M eine feste positive Zahl ist. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in (-1, 1)$ die Reihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ konvergiert.

4. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit einem Diagonalisierungsargument, dass jede niemals konstante Folge überabzählbar viele Teilfolgen hat. (Hinweis: Stellen Sie die Teilfolgen als binäre Zahlen dar.)

(b) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und (h_n) eine Folge von Häufungspunkte von (x_n) und $h \in \mathbb{R}$ mit $h_n \to h$. Zeigen Sie mit einem Diagonalisierungsargument, dass h auch ein Häufungspunkt von (x_n) ist.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass jede Gruppe von maximal drei StudentInnen eine Serie abgeben sollte,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

v) Alle elektronischen Lösungen sollen an math4inf@math.hu-berlin.de geschickt werden.