Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Andreas Griewank Ph.D.
Dr. Thomas M. Surowiec
Dr. Fares Maalouf

Übungsaufgaben Mathematik für InformatikerInnen II (SoSe 12)

Serie 5

Die Abgabe erfolgt zu am 21.05.2012 um 15:00 Uhr.

---

1. (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz, bzw. Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$

2. (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz, bzw. Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

3. (4 Punkte)

(a) Sei f eine Funktion von $[a,b]$ nach $[a,b]$, so dass für alle x und x' ($x \neq x'$) aus $[a,b]$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Zeigen Sie, dass f stetig auf $[a,b]$ ist.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig ist.

4. (2 Punkte) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \to a$. Dann konvergiert die Folge (b_n) der zugehörigen arithmetischen Mittel

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ebenfalls gegen a.}$$

(Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $a_n \to a$ gibt es ein $N_1(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n \geq N_1(\varepsilon/2)$. Leiten Sie die Abschätzung

$$|b_n - a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon/2)} |a_n - a| + \frac{1}{n} \sum_{N_1(\varepsilon/2)+1}^{n} |a_n - a|$$

her und finden Sie $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N(\varepsilon)$ die rechte Seite kleiner ε ist.)

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass jede Gruppe von maximal drei StudentInnen eine Serie abgeben sollte,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

v) Alle elektronischen Lösungen sollen an math4inf@math.hu-berlin.de geschickt werden.