Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Andreas Griewank Ph.D.
Dr. Thomas M. Surowiec
Dr. Fares Maalouf

Übungsaufgaben Mathematik für InformatikerInnen II (SoSe 12)

Serie 9

Die Abgabe erfolgt zu am 18.06.2012 um 15:00 Uhr.

---

1. (4 Punkte) Berechnen Sie mittels der Taylorscher Formeln die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - (1+x)\sin x}{x}$$

2. (4 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

Untersuchen Sie die Reihen (nach Konvergenz/Divergenz) auch an den Grenzen der Konvergenzintervalle.

3. (4 Punkte) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen nach den Potenzen von x bis zur angegebenen Ordnung (einschliesslich).

(a) $\cos x \cdot \ln(1+x)$ bis zum Glied mit x^4.

(b) e^{2x-x^2} bis zum Glied mit x^5

4. (4 Punkte) Wir wollen beweisen, dass, falls f auf $[0,1]$ stetig ist, und für alle $0 < x < y < 1$ gilt

$$f((x+y)/2) \leq f(x)/2 + f(y)/2 \qquad (*)$$

dann f konvex ist gemäss Definition C134. Dazu betrachte zwei Fälle:

(a) f ist auf $(0,1)$ zweimal stetig differenzierbar. Wende die Hospitalregel auf den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} [f(z+h) + f(z-h) - 2f(z)]/h^2$$

an, wobei $z \in (x,y)$, und folgere daraus mit (*) und der Charakterisierung von Konvexität nach Satz C136(a) im Skript, dass f konvex ist.

(b) f ist lediglich stetig auf $[0,1]$. Nun betrachte ein beliebiges Interval $(x,y) \subset [0,1]$. Prüfe dann durch Induktion, dass für alle $\lambda = j/2^i$ mit $0 \leq j \leq 2^i$ gilt

$$f(x(1-\lambda) + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Folgere schließlich aus der Stetigkeit von f und der nach Satz C16 existierenden binären Darstellung von λ, dass die letzte Aussage auch für beliebiges $\lambda \in (0,1)$ gilt.

Vergessen Sie nicht,

i) die Lösungen der vier schriftlichen Aufgaben sind getrennt voneinander abzugeben,

ii) dass jede Gruppe von maximal drei StudentInnen eine Serie abgeben sollte,

iii) alle Blätter mit Name(n), Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe zu versehen,

iv) Ihre Lösung stets auf Basis der Vorlesung bzw. Übung zu begründen.

v) Alle elektronischen Lösungen sollen an math4inf@math.hu-berlin.de geschickt werden.