Beispiel A.123

$$P(x) = x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{0,1} = -\frac{1}{2}\left[1 \pm i\sqrt{3}\right]$$

Probe: $x_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_0 + 1 &= \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3} + i^2\tfrac{3}{4}\right) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3} + 1 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3} + 1 \\ &= \underbrace{-\tfrac{i}{2}\sqrt{3} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3}}_{=0} + \underbrace{\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} + 1}_{=0} \end{aligned}$$

Also: $x_0^2 + x_0 + 1 = \mathbf{0}$

Probe: $x_0 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$x_1^2 + x_1 + 1 = \underbrace{\tfrac{i}{2}\sqrt{3} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3}}_{=0} + \underbrace{\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} + 1}_{=0} = \mathbf{0}$$

Bemerkung

Alle Gleichungen aus dem Reellen gelten auch im Komplexen. Nur Ungleichungen, die Beträge enthalten, machen auch im Komplexen Sinn.

Lemma A.125

In $\mathbb{C}$ gilt

(i) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *für* $\varphi = \arg(z)$

(ii) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(iii) $|z|^2 = \bar{z} * z$, $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$

(iv) $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$

(v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **Dreiecksungleichung**

(vi) $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$
$\arg(z_1 * z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pm 2\pi k$

(vii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
$\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pm 2\pi k$

Definition A.124

Betrachtet man $z = x + iy$ als Vektor in der Ebene mit den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so ergibt sich

(i) als Länge des Vektors der **Betrag** der komplexen Zahl z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+ \,,$$

(ii) durch Spiegelung an der Horizontalen die **konjugiert komplexe Zahl** von z

$$\bar{z} = x + i(-y) \in \mathbb{C},$$

(iii) als Winkel zur Horizontalen des **Arguments**

$$arg(z) = \arctan(y, x) \in (-\pi, \pi)\,,$$

so dass $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$.

Häufige Bezeichnung:

$$r = |z| \qquad \varphi = \arg(z)$$

Erläuterung

Aus (ii) folgt, dass die Zahl $z \in \mathbb{C}$ genau dann zum Unterkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gehört, wenn sie mit ihrer konjugiert komplexen $\bar{z}$ übereinstimmt.
Entsprechend gilt $z = -\bar{z}$ genau dann wenn z rein imaginär, also gleich $i\ Im(z)$ ist.
Aussagen (iv) und (v) lassen sich so interpretieren, dass $|\cdot|$ und *arg* Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{C}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_+$ bzw. die additive Gruppe $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{R})$ sind.

Lemma A.126

(i) *Konjugierung ist ein Körperhomomorphismus auf $\mathbb{C}$, d.h. es gilt für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dass*

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}\,.$$

(ii) *Daraus folgt durch Induktion dass für jedes komplexe Polynom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$*

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$$

wobei $\overline{P}(z)$ dasjenige Polynom bezeichnet, dessen Koeffizienten gerade die Konjugierten der Koeffizienten von $P(z)$ sind.

Eulers Formel und Einheitswurzeln

Ein weiterer Ausflug ins Komplexe wird notwendig, wenn man ein Polynom $P(z)$ wirklich sehr schnell und genau an $n = deg(P(x)) + 1$ geigneten Stützstellen z_j auswerten will. Dazu wählt man dann

$$z_j = cos(j * 2\pi/n) + i\, sin(j * 2\pi/n)$$

Da nach der sogenannten Eulerschen Formel für $\varphi = arg(z)$, $r = |z|$ und $k \in \mathbb{N}$

$$z^k = |z|^k [cos(k\varphi) + i\, sin(k\varphi)]$$

sind die obigen z_j für $j = 1 \ldots n$ genau die n Wurzeln des Polynomes $P_n(z) = z^n - 1$.
Vorrausgesetzt $n = 2 * m$, dann ergibt sich für $j = 1, \ldots m$ durch Quadratbildung

$$z_j^2 = cos(2j * 2\pi/n) + i\, sin(2j * 2\pi/n) = cos(j\, 2\pi/m) + i\, sin(j * 2\pi/m) = z_{j+m}^2$$

Es gibt also nur m unterschiedliche Werte von z_j^2 für $j = 1, \ldots n$, welche genau die Wurzeln von $P_m(x) = x^m - 1$ sind.

Korollar A.127

Aus obigen Lemma folgt, dass für ein Polynom $P(z) \in \mathbb{R}[z]$ die Wurzeln jeweils in konjugiert komplexen Paaren auftreten, d.h.

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{z}) = 0$$

Diese Eigenschaft ist umgekehrt für ein beliebiges komplexes Polynom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit mindestens einem reellen Koeffizienten $p_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, auch hinreichend dafür, dass alle seine Koeffizienten reell sind.

Bemerkung

Dieses Aussage ist immer dann wichtig, wenn man Polynome aus einem eigentlich reellen Modell erhält und nur mehr oder minder widerwillig und hoffentlich vorrübergehend ins Komplexe geht. Dies gilt zum Beispiel für charakteristische Polynom in der linearen Algebra.

Schlussbemerkung

Bei der Erweiterung von den reellen auf die komplexen Zahlen verliert man die Möglichkeit, alle Zahlen eindeutig nach einer 'sinnvollen' Grösse zu ordnen.
Beim Übergang zum nächsten Erweiterungskörper, nämlich den sogenannten Quaternionen, geht (notwendigerweise) auch noch die Kommunitativität der Multiplikation verloren.
Darüberhinaus kann es keine Oberkörper mehr geben. Stattdessen bedient man sich in der Mathematik zur Beschreibung umfangreicherer, aber nicht notwendigerweise komplexerer Strukturen sogenannter **Module** über Ringen und **Vektorräume** oder **Algebren** über Körpern.
Ähnlich wie bei Polynomringen spielen dabei die Ring- bzw. Körperelemente als 'Koeffizienten' eine zentrale Rolle , mit deren Hilfe sich alle 'praktischen' Berechnungen durchführen lassen.