Lemma B.10 (Vorzeichen des Vektorproduktes)

Werden die Vektoren $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *im Vektorprodukt vertauscht, dann ändert sich nur das Vorzeichen des Vektorproduktes:*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \;=\; -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

Lemma B.11 (Bilinearität)

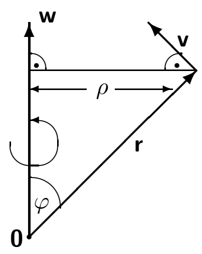
Für beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *und Skalare* λ *gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} \;=\; \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) \;=\; -\lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Eine wichtige Anwendung des Kreuzproduktes in der Mechanik ist die **Drehung eines Körpers um eine feste Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit** ω. Man beschreibt diese Rotation durch einen Vektor $\mathbf{w}$, dessen Richtung $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ parallel zur Rotationsachse ist und dessen Länge die Winkelgeschwindigkeit repräsentiert, so daß $\omega = |\mathbf{w}|$ ist.

Der Vektor $\mathbf{w}$ ist so orientiert, daß die Drehung beim Blicken entlang seiner Richtung im Uhrzeigersinn erfolgt.

Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit nehme man nun an, daß die Drehachse genau durch den Ursprung verläuft.



Dann erhält man den momentanen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ eines Körperpunktes P mit derzeitigem Ortsvektor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ als $\mathbf{v} \;=\; \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.

Damit ergibt sich

Lemma B.12 (Komponentenweise Berechnungsvorschrift)

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T \times (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \;=\; (\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2, \nu_1\mu_3 - \nu_3\mu_1, \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)^T$$

Diese Regel merkt man sich am besten indem man sie als die Determinante einer (3×3) Matrix interpretiert. Und zwar gilt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} .$$

Bemerkung:

Hierbei handelt es sich allerdings nicht um eine gewöhnliche Matrix, da die drei Elemente in der ersten Zeile Vektoren, die Elemente der zweiten und dritten Zeile aber Skalare sind. Regeln für das Berechnen von Determinanten werden ii einem der nächsten Abschnitte behandelt.

Diese Formel ergibt sich gemäß der Zeichnung aus der Beobachtung, daß die momentane Bewegungsrichtung $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ orthogonal zu $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ sein muß und daß der Geschwindigkeitsbetrag $|\mathbf{v}|$ gleich ω mal dem Abstand von der Achse,also $|\mathbf{r}|\sin(\phi)$, ist.
Hierbei ist φ der von den Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ eingeschlossene Winkel und die Orientierung der resultierenden Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist so, daß $\mathbf{w}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ ein rechtshändiges System bilden.

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \;=\; 0 \;=\; \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

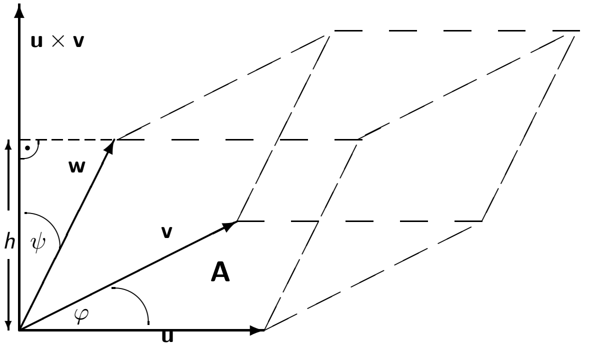
$$|\mathbf{v}| \;=\; \rho\,\omega \;=\; |\mathbf{r}||\sin\varphi||\mathbf{w}| \;=\; |\mathbf{r} \times \mathbf{w}|$$

Spatprodukt

Definition B.13 (Spatprodukt)

Bildet man das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ und einem dritten Vektor $\mathbf{w}$, so ergibt sich das sogenannte Spatprodukt:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \;\equiv\; (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \;\in\; \mathbb{R}\,.$$



Lemma B.16 (Vorzeichen Spatprodukt)

Für das **Vorzeichen** *gilt die folgende Regel:*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad \begin{cases} > 0 & \textit{falls} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \textit{Rechtssystem} \\ < 0 & \textit{falls} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \textit{Linkssystem} \\ = 0 & \textit{falls} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \textit{linear abhängig} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet der Begriff **linear abhängig** *den Zustand, daß die drei Vektoren in einer Ebene liegen und es deshalb nicht triviale Koeffizienten* α, β, γ *gibt, für die*

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \textit{gilt}\,.$$

Lemma B.17 (Identität im Anschauungsraum)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \;=\; \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}\,,$$

wobei $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *ist.*

Lemma B.14 (Betrag Spatprodukt)

Gemäß der Zeichnung ergibt der Betrag

$$|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| \;=\; \underbrace{(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\varphi))}_{A}\,\underbrace{|\mathbf{w}|\cos(\psi)}_{h}$$

genau das Volumen des Parallelepipeds mit der Grundfläche A und der Höhe h.

Folgerung B.15

Daraus sieht man unmittelbar, daß das Spatprodukt bis auf das Vorzeichen von der Reihenfolge der Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *unabhängig ist, da diese immer das gleiche Parallelepiped aufspannen.*

B - 3 Abstandsnormen

Eine ganz zentrale Rolle in der lineare Algebra und (allgemeiner der sogenannten Funktionalanalysis) spielt der Begriff des **Abstandes** zwischen zwei Vektoren (z.B. auch Funktionen). Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, 'Kugeln' und andere 'Umgebungen' von Vektoren zu betrachten die 'nahe' bei einander liegen.

Definition B.18 (Norm und normierter Raum)

Ein linearer Vektorraum $\mathcal{V}$ heisst **normiert**, wenn es zu jedem $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ eine reele Zahl $\|\mathbf{u}\|$ gibt, so dass für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gilt:

- $\|\mathbf{u}\| \geq 0 \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$ **Definitheit**
- $\|\lambda\,\mathbf{u}\| \;=\; |\lambda|\|\mathbf{u}\|$ **Homogenität**
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \;\leq\; \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ **Dreiecksungleichung**

Hier ist $|\lambda|$ der gewöhnliche Betrag reeller Zahlen.

Aus der (Cauchy-)Schwarz-Ungleichung folgt unmittelbar die Dreiecksungleichung, da

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Auch die Homogenität ist gewährleistet, da

$$\|\lambda\mathbf{u}\| = \sqrt{\lambda\mathbf{u}\cdot\lambda\mathbf{u}} \;=\; |\lambda|\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$$

Also haben die sogenannten **Hilbert-Normen** $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}*\mathbf{u}}$ in der Tat die verlangten Normeigenschaften.
Man nennt den Vektorraum dann auch **Hilbert-Raum**.

Lemma B.19 (Weitere Normeigenschaften)

- *Per Induktion ergibt sich für die* **Summe** *endlich vieler Vektoren $v_i, i = 1 \ldots m$, die Ungleichung*
$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \nu_i\right\| \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} \|\nu_i\|$$
- *Aus der Dreiecksungleichung folgt für alle Normen die sogenannte* **umgekehrte Dreiecksungleichung**
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \;\geq\; |\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\||$$
- *Eine Norm $\|\mathbf{v}\|$ ist genau dann eine Hilbert-Norm, wenn sie die folgende sogenannte* **Parallelogrammgleichung** *erfüllt*
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \quad = \quad 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

Bemerkung:
Im letzteren Fall lässt sich die Identität
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \;=\; \tfrac{1}{4}\left[\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right]$$
auch als Definition des Inneren Produktes interpretieren.

In numerischen Anwendungen der Lineare Algebra werden neben der Euklidischen Norm häufig folgende anderen Normen benutzt:

- Für festes $1 \leq p \leq \infty$ setze
$$\|\mathbf{v}\|_p \;=\; \|(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n)^T\|_p \;=\; [|\nu_1|^p + |\nu_2|^p + \ldots |\nu_n|^p]^{1/p}$$
- Für $p = 2$ erhält man wiederum die Euklidische Norm $\|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|$. Im Grenzfall $p = \infty$ setzt man
$$\|\mathbf{v}\|_\infty \;=\; \|(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n)^T\|_\infty \;=\; \max\{|\nu_1|, |\nu_2|, \ldots |\nu_n|\}$$
- Die Menge der Vektoren $\mathbf{u}$ mit $\|\mathbf{u}\|_1 \leq 1$ und $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq 1$ bilden für $n = 2$ (d.h. in der Ebene) ein achsenparalleles bzw. diagonal orientiertes Quadrat.
- Bei den Zwischenwerten $1 < p < \infty$ und insbesondere der Euklidischen Norm $\|\mathbf{u}\|_2$ haben die verallgemeinerten Kugeln $\{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \|\mathbf{u}\|_p \leq 1\}$ dagegen keine Ecken.
- Die beiden Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ haben den Vorteil, dass die entsprechenden Normen billig auswertbar sind.

B-4 Basen und Unterräume

Im vorigen Abschnitt wurde festgestellt, daß im Anschauungsraum drei Vektoren **linear abhängig** sind (d.h. in einer Ebene liegen), wenn ihr Spatprodukt verschwindet.
Das Konzept der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit ist von zentraler Bedeutung für die Untersuchung beliebiger Räume und ihrer sogenannten Unterräume.

Definition B.20 (Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit)

Eine Familie (= Menge) von Vektoren $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{V}$ heißt **linear abhängig**, wenn es Skalare $\{\lambda_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{R}$ gibt so daß gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \neq 0 \, .$$

Die zweite Bedingung schließt die Möglichkeit aus, daß alle λ_i verschwinden, in welchem Falle die erste Bedingung trivialerweise für jede Familie $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{V}$ zuträfe.

Umgekehrt heißt eine Familie $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{V}$ **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 0 \, .$$

Folgerung B.23

Zwei nicht verschwindende, zueinander orthogonale Vektoren $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ sind auf jeden Fall linear unabhängig.

Beweisidee:

Um dies zu zeigen, bilde man das Skalarprodukt von $\mathbf{v}_1$ mit beiden Seiten der Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

und erhält

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 = \lambda_1 |\mathbf{v}_1|^2$$

und somit $\lambda_1 = 0$.
Entsprechend folgt aus dem Skalarprodukt mit $\mathbf{v}_2$ die Gleichung $\lambda_2 = 0$ und damit die behauptete lineare Unabhängigkeit von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. □

Beobachtung:

Dieselbe Schlußfolgerung kann man leicht für eine Familie von beliebig vielen paarweise orthogonalen Vektoren $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{V}$ mit $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, $v_i \neq \mathbf{0}$, für $i \neq j$ durchführen. Deshalb sollte man Orthogonalität als eine besonders starke Form linearer Unabhängigkeit betrachten.

Folgerung B.21

Man sieht leicht, daß eine Obermenge linear abhängiger Vektoren auch linear abhängig ist, während eine Untermenge linear unabhängiger Vektoren auch linear unabhängig ist.

Folgerung B.22

Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind, da

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \, , \; \lambda_1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = -(\lambda_2/\lambda_1)\mathbf{v}_2 \, .$$

Bemerkung:

Hierbei haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt, daß $\lambda_1 \neq 0$. Entsprechendes gilt, wenn $\lambda_2 \neq 0$, aber möglicherweise $\lambda_1 = 0$.

Folgerung B.24 (Lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$)

Man kann zeigen, daß es im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ jeweils maximal drei linear unabhängige Vektoren (wie z.B. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) gibt.

Definition B.25 (Dimension eines Vektorraumes)

Die maximale Zahl linear unabhängiger Vektoren in einem Raum $\mathcal{V}$ wird als dessen **Dimension** $\dim(\mathcal{V})$ bezeichnet.
Falls es Familien linear unabhängiger Vektoren mit beliebig vielen Elementen in einem Raum $\mathcal{V}$ gibt, so bezeichnet man ihn als **unendlich dimensional** und setzt $\dim(\mathcal{V}) = \infty$.

Beispiel B.26

Der Raum aller Polynome ist unendlich dimensional, da die Familie von sogenannten Monomen (reinen Potenzen)

$$x^j \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

für ein beliebiges n linear unabhängig ist.