B - 6 Matrizen und ihre Algebra

Definition B.48 (Matrix)

Ein Zahlenschema

$$A = (\alpha_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\,1} & \alpha_{1\,2} & \cdots & \alpha_{1\,n} \\ \alpha_{2\,1} & \alpha_{2\,2} & \cdots & \alpha_{2\,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{m\,1} & \alpha_{m\,2} & \cdots & \alpha_{m\,n} \end{pmatrix}$$

heißt eine **reelle** $(m \times n)$ **Matrix**, die aus m Zeilen und n Spalten besteht. Man sagt auch A ist vom Typ oder Format (m, n) und schreibt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (siehe Definition B.55).

Die Elemente in der i-ten Zeile von A bilden den sogenannten Zeilenvektor $(\alpha_{i\,j})_{j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^n$ und die Elemente in der j-ten Spalte den Spaltenvektor $(\alpha_{i\,j})_{i=1\ldots m} \in \mathbb{R}^m$.

Der Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergibt sich nun wie folgt.

Sind $(\mathbf{v}_j)_{j=1\ldots n}$ und $(\mathbf{w}_i)_{i=1\ldots m}$ Basen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $F : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ mit der Eigenschaft

$$F(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\,j}\, \mathbf{w}_i \,.$$

Dann gilt für beliebige Vektoren $\mathbf{v} = \sum \nu_j \mathbf{v}_j$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= \sum_{j=1}^{n} \nu_j F(\mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \nu_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\,j} \mathbf{w}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{w}_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} \nu_j}_{\omega_i} \,. \end{aligned}$$

Definition B.49 (Matrix-Vektor-Produkt)

Die durch die letzte Gleichung implizierte Rechenvorschrift nennt man ein **Matrix–Vektor–Produkt** und schreibt einfach

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\,1} & \alpha_{1\,2} & \cdots & \alpha_{1\,n} \\ \alpha_{2\,1} & \alpha_{2\,2} & \cdots & \alpha_{2\,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{m\,1} & \alpha_{m\,2} & \cdots & \alpha_{m\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v} \,.$$

Diese Matrix-Vektor-Gleichung ist eine Abkürzung für die komponentenweise Identität

$$\boxed{\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} \nu_j \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m} \tag{1}$$

Beispiel B.50

Bezüglich der monomialen Basis hat die schon im Beispiel B.46 erwähnte Abbildung durch **Differentiation** in $\mathcal{P}_n$ für $n = 5$ die Matrix-Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ergibt sich für $i = 1, \ldots, 5$ aus der Grundbeziehung

$$F(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i' = (i-1)\,\mathbf{v}_{i-1} \qquad \text{da} \quad \mathbf{v}_i = x^{i-1} \,,$$

wobei hier $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ und deshalb $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$.

Definition B.51 (Hintereinanderausführung linearer Abbildungen)

Betrachtet man zwei lineare Abbildungen

$$G : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V} \quad \text{und} \quad F : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W} ,$$

so ist deren **Komposition** oder **Hintereinanderausführung**

$$F \circ G : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{W} \quad \text{mit} \quad (F \circ G)(\mathbf{u}) \; = \; F(G(\mathbf{u}))$$

eine lineare Abbildung von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{W}$.

Bezüglich geeigneter Basen $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1\ldots p}$ von $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1\ldots n}$ von $\mathcal{V}$ und $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1\ldots m}$ von $\mathcal{W}$ entsprechen den Abbildungen F und G Matrizen

$$A = (\alpha_{i\,j})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n} \quad \text{und} \quad B = (\beta_{j\,k})_{j=1\ldots n}^{k=1\ldots p} .$$

Hierbei entspricht die Spaltenzahl von A der Zeilenzahl von B, da diese beide gleich der Dimension n des Zwischenbereiches $\mathcal{V}$ sind.

Definition B.52 (Matrixmultiplikation)

Unter diesen Bedingungen kann man nun durch wiederholte Anwendung von (1) die Koeffizienten ω_i eines Bildes $\mathbf{w} = F(G(\mathbf{u}))$ direkt aus den Koeffizienten μ_k von $\mathbf{u}$ berechnen. Und zwar gilt für jedes $i = 1 \ldots m$

$$\omega_i \; = \; \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} \nu_j \; = \; \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{j\,k} \mu_k \right) \; = \; \sum_{k=1}^{p} \mu_k \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i\,j} \beta_{j\,k}}_{\gamma_{i\,k}} .$$

Mittels der $(m \times p)$ Matrix $(\gamma_{i\,k})_{i=1,\ldots m}^{k=1,\ldots p}$ erhält man also das neue Matrix–Vektor–Produkt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{1\,1} & \gamma_{1\,2} & \cdots & \gamma_{1\,p} \\ \gamma_{2\,1} & \gamma_{2\,2} & \cdots & \gamma_{2\,p} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ \gamma_{m\,1} & \gamma_{m\,2} & \cdots & \gamma_{m\,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} .$$

Definition B.53 (Matrix-Matrix Schreibweise)

Den Zusammenhang zwischen den $\alpha_{i\,j}$, $\beta_{j\,k}$ und den resultierenden $\gamma_{i\,k}$ nennt man ein **Matrix–Matrix–Produkt** (kurz **Matrix-Produkt**) und schreibt

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1\,1} & \cdots & \gamma_{1\,p} \\ & \ldots\ldots & \\ \gamma_{m\,1} & \cdots & \gamma_{m\,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\,1} & \cdots & \alpha_{1\,n} \\ & \ldots\ldots & \\ \alpha_{m\,1} & \cdots & \alpha_{m\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1\,1} & \cdots & \beta_{1\,p} \\ & \ldots\ldots & \\ \beta_{n\,1} & \cdots & \beta_{n\,p} \end{pmatrix}$$

oder ganz kurz

$$C \; = \; (\gamma_{i\,k})_{i=1\ldots m}^{k=1\ldots p} \; = \; A\,B$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und deshalb $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

Dabei ist das Element γ_{ik} in der i-ten Zeile und k-ten Spalte des Produktes C gerade das innere Produkt der i-ten Zeile des linken Faktors A und der k-ten Spalte des rechten Faktors B.

Faustregel Matrix-Multiplikation

Zeile · Spalte

Beispiel B.54

Man betrachte die beiden (3×3) Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\sigma = 1/\sqrt{2}$ ist.

Bezüglich der kartesischen Basis des dreidimensionalen Anschauungs-raumes
beschreibt A die **Spiegelung** aller Vektoren $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ an der diagonalen Fläche $y = z$.

B beschreibt bezüglich der kartesischen Basis eine **Achtel-Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn** um die z-Achse $\mathbf{e}_3$ (Achtung: Rechtssystem!!).

Fortsetzung Beispiel

Wird nun *zuerst rotiert und dann reflektiert*, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sigma & \sigma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier ergab sich zum Beispiel das Element in der dritten Zeile und zweiten Spalte des Produktes als $(0,1,0) \cdot (\sigma, \sigma, 0)^T = 0 \cdot \sigma + 1 \cdot \sigma + 0 \cdot 0 = \sigma$.

Tauscht man jedoch die Reihenfolge der Faktoren aus, so erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & \sigma \\ -\sigma & 1 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix beschreibt die *Hintereinanderausführung der Spiegelung und dann der Drehung*, was zu unterschiedlichen Ergebnissen führt.

Bemerkung:

Wie das Beispiel zeigt, ist die Matrixmultiplikation **nicht kommutativ**.
Sie ist allerdings assoziativ in dem Sinne, daß

$$(A\,B)\,C = A(B\,C)$$

für beliebige Matrizen A, B und C ist, vorausgesetzt die Spaltenzahl von A gleicht der Zeilenzahl von B und die Spaltenzahl von B gleicht der Zeilenzahl von C, da die Produkte sonst gar nicht definiert wären.
Diese Identität kann man durch Ausmultiplizieren überprüfen oder aus der Tatsache ableiten, daß die Hintereinander ausführung von Abbildungen auch assoziativ ist, d.h. es gilt $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$, vorausgesetzt der Bildbereich von H gehört zum Definitionsbereich der Abbildung G und der Bildbereich von G gehört zum Definitionsbereich von F. In jedem Falle wird hier ein gegebenes Element $\mathbf{u} \in Dom(H)$ nach $F(G(H(\mathbf{u}))$ abgebildet.
Diese Eindeutigkeit der Komposition von Abbildungen überträgt sich auch auf die Multiplikation von Matrizen.

Definition B.55 (Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times n}$)

Alle **reellen Matrizen eines gegebenen Typs** (m, n) bilden eine Menge, die man mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet. Diese Menge ist sogar ein reeller **Vektorraum** bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation, d.h.

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n} \quad \text{und} \quad \lambda\,A = (\lambda\,\alpha_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$$

für beliebige Matrizen

$$A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, B = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Vorausgesetzt die Typen von A, B und C sind kompatibel, so daß die folgenden Ausdrücke überhaupt definiert sind, gelten die **Distributivgesetze:**

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A\,B + A\,C \\ (A + B)\,C &= A\,C + B\,C\,. \end{aligned}$$

Definition B.56 (Identitätsmatrix)

Bezüglich der Multiplikation von Matrizen gibt es ein neutrales Element, nämlich die **Einheits**- oder **Identitätsmatrix**

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

Der die Größe der Matrix angebende Index n kann wegfallen, wenn er sich aus dem Zusammenhang ergibt. Es gilt nun insbesondere

$$I_m A = A = A\,I_n \quad \text{für} \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n} .$$