

Beispiel B.71

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \boxed{x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$



Man beachte:

Vertauschung von Zeilen- bzw. Spaltenindex in $b_{jk} = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)} \det(A_{kj})$

Zweckmäßigerweise ergibt sich Darstellung:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\left((-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \right)_{i=1 \dots n}^j \right)^T$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & +\det(A_{31}) & \dots \\ -\det(A_{12}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{32}) & \dots \\ +\det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Warnung:

Für rechteckige Matrizen läßt sich die Determinante nicht definieren.



Anwendung der Cramerschen Regel auf die Bestimmung der inversen Matrix A^{-1}

Bezeichnung $A^{-1} = B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$, $AB = I$

Die gesuchte Matrix $B = A^{-1}$ läßt sich schrittweise aus den Gleichungssystemen

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \quad k = 1, \dots, n$$

↳ k-te Position

berechnen:

$$\boxed{b_{jk} = \frac{1}{\det(A)} \det(A_j | \mathbf{e}_k) = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)} \det(A_{kj})}$$

$$\text{mit } A_j | \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \textcircled{1} & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow k$$

\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_j \mathbf{e}_k



Beispiel B.72

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \implies \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = I$

