Lösung allgemeiner Linearer Systeme ($m \neq n$ möglich)

Die Lösbarkeit eines linearen Systems

$$A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

hängt sehr stark vom sogenannten **Rang** der $m \times n$ Matrix A ab. Diese natürliche Zahl $rang(A)$ erfüllt die folgenden äquivalenten Definitionen:

- maximale Zahl linear unabhängiger Spalten
- maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen
- Dimension des Bildraumes $\{A\mathbf{x} \,:\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- $n - dim(kern(A)) \quad$ mit $\quad kern(A) \;=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, A\mathbf{x} \;=\; 0\}$
- maximale Größe einer quadratischen Untermatrix $\tilde{A}$ mit nichtverschwindender Determinante $\det(\tilde{A})$

Mittels der **Gauß–Elimination** läßt sich ein beliebiges, d.h. nicht notwendigerweise quadratisches, lineares System $A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}$ immer zu einem äquivalenten System $\tilde{A}\,\tilde{\mathbf{x}} \;=\; \tilde{\mathbf{b}}$ umformen. Hierbei unterscheiden sich die Lösungsvektoren $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{x}$ nur in der Reihenfolge ihrer Elemente, $\mathbf{x}$ kann also als Permutation von $\tilde{\mathbf{x}}$ erhalten werden, wenn überhaupt Spaltenvertauschungen durchgeführt wurden. Die Matrix $\tilde{A}$ hat Trapezform, so daß

$$
m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times & \times & & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times & \times & & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}}^{n}\right.
\begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}\times\\ \times\\ \vdots\\ \times\\ \times\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}\times\\ \vdots\\ \times\end{matrix}}\right\} n-r \end{matrix}
=
\begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}\times\\ \times\\ \vdots\\ \times\\ \times\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix}
$$

$$\underbrace{\hphantom{\times\quad\times\quad\dots\quad\times\quad\times}}_{r}\underbrace{\hphantom{\times\quad\dots\quad\times}}_{n-r}$$

wobei die ersten $r \;=\; rang(A)$ Elemente der Diagonale nicht Null sind.

Eigenschaften der Lösung $\mathbf{x}$

Aus der Trapezform des linearen Systems lässt sich unmittelbar ablesen:

- die letzten $m - r$ Komponenten von $\tilde{\mathbf{b}}$ müssen verschwinden, sonst gibt es keine Lösungen,
- gibt es überhaupt Lösungen, so sind die letzten $n - r$ Komponenten von $\tilde{\mathbf{x}}$ beliebig.

Aus diesen beiden Beobachtungen ergeben sich für die entsprechenden Größen $\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}$ die folgenden möglichen Situationen:

$n = r = m$: Für beliebiges $\mathbf{b}$ gibt es eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}$

$n = m > r$: Für bestimmte $\mathbf{b}$ (insbesondere $\mathbf{b} \;=\; 0$) existieren mehrere Lösungen $\mathbf{x}$, sonst keine

$m = r < n$: Für beliebige $\mathbf{b}$ existieren mehrere $\mathbf{x}$

$n = r < m$: Für bestimmte $\mathbf{b}$ existieren eindeutige $\mathbf{x}$, sonst keine

$n > r < m$: Für bestimmte $\mathbf{b}$ existieren mehrere $\mathbf{x}$, sonst keine

B - 10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Komplexe Lineare Algebra

Für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren von nicht symmetrischen reellen Matrizen besteht die Notwendigkeit, die bisher im Reellen betrachtete lineare Algebra auf die Räume $\mathbb{C}^n$ der n-elementigen komplexen Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ mit

$$\mathbf{a} = (\alpha_i)_{i\,=\,1\ldots n}, \qquad \alpha_i \;=\; Re\,(\alpha_i) + \mathbf{i}Im\,(\alpha_i) \in \mathbb{C}$$

zu erweitern. Zu jedem solchen Vektor $\mathbf{a}$ existiert der konjugiert–komplexe Vektor

$$\bar{\mathbf{a}} = (\bar{\alpha}_i)_{i\,=\,1\ldots n}, \qquad \bar{\alpha}_i \;=\; Re(\alpha_i) - \mathbf{i}Im(\alpha_i) \in \mathbb{C}.$$

Offensichtlich gilt, wie schon im skalaren Falle, für jeden **reellen Vektor** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$.

Durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \;=\; \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \beta_i \;\in\; \mathbb{C}$$

wird nun ein inneres Produkt (oder Skalarprodukt) definiert, welches im Gegensatz zum reellen Falle nicht kommutativ ist, d.h. es ist von der Reihenfolge der Faktoren abhängig:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \;=\; \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{a} \;=\; \overline{\bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}} \;=\; \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

Da nun $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ immer reell und nicht negativ ist läßt sich damit die innere Produktnorm

$$\|\mathbf{a}\| \;=\; \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \;=\; \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

definieren.

Es gelten die üblichen Normeigenschaften

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0, \qquad \|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = 0, \qquad \|\gamma \mathbf{a}\| = |\gamma| \|\mathbf{a}\|$$

für beliebiges $\gamma \in \mathbb{C}$, sowie die Dreiecksungleichungen

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|, \qquad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq \big| \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \big| \,.$$

Erweitert man den Körper der Skalare von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$, so bleiben fast alle Definitionen und Sätze gültig. Das gilt insbesondere für die Begriffe

- Linearkombination
- Linearer Unterraum
- Dimension
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Lineare Abbildung

sowie Matrizen und ihre speziellen Formen.

Unterschiede ergeben sich lediglich dort, wo das innere Produkt eine wesentliche Rolle spielt:
Eine **Familie von Vektoren** $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$, $i \;=\; 1 \ldots r$, heißt **orthogonal**, wenn

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \;=\; \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_j \;=\; 0 \qquad \text{für } i \neq j \,,$$

was weiterhin lineare Unabhängigkeit impliziert. Eine quadratische **Matrix**

$$A \;=\; (\alpha_{ij})_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

heißt **orthogonal**, wenn ihre Spalten paarweise orthogonal sind und ihre Norm jeweils gleich 1 ist. Mittels der **konjugiert transponierten Matrix**

$$\bar{A}^T \;=\; \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{1\,1} & \ldots & \bar{\alpha}_{n\,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\alpha}_{1\,n} & \ldots & \bar{\alpha}_{n\,n} \end{pmatrix}$$

läßt sich die Orthogonalität von A durch die Beziehungen

$$\bar{A}^T A \;=\; I \;=\; A \bar{A}^T$$

beschreiben, wobei I weiterhin die Einheitsmatrix bezeichnet:

$$I \;=\; diag(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n} \,.$$

Abgesehen von der Orthogonalität erfährt auch der Begriff der **Symmetrie** bei der Erweiterung auf komplexe Matrizen eine Veränderung. Man kann zwar eine Matrix $A \;=\; (\alpha_{i\,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ immer noch symmetrisch nennen, wenn $\alpha_{j\,i} \;=\; \alpha_{i\,j}$ gilt, diese Eigenschaft ist aber wesentlich weniger interessant als die Erfüllung der Bedingung

$$\bar{\alpha}_{j\,i} \;=\; \alpha_{i\,j} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}^T \;=\; A \,.$$

Solche Matrizen nennt man **hermitesch** und die entsprechenden linearen Abbildungen auch **selbstadjungiert**, da für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbf{a} \cdot (A\mathbf{b}) \;=\; \bar{\mathbf{a}}^T A\mathbf{b} \;=\; (\bar{A}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \;=\; (A\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

gilt. Für uns wird nur von Bedeutung sein, daß hermitesche Matrizen (wie ihre Untermenge der reell symmetrischen Matrizen) nur reelle Eigenwerte haben.

Definition B.73 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wenn es einen entsprechenden **Eigenvektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ gibt, so daß gilt:

$$A\mathbf{v} \;=\; \lambda\mathbf{v} \quad \text{mit} \qquad \mathbf{v} \neq 0\,.$$

Folgerung B.74

Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathbf{v}$ *eine nicht triviale Lösung des homogenen Systems*

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} \;=\; 0$$

ist. Eine solche existiert genau dann, wenn der Rang von $(A - \lambda\, I)$ *kleiner als* n *ist, und damit äquivalenterweise gilt*

$$P(\lambda) \;\equiv\; \det(A - \lambda\, I) \;=\; 0\,.$$

$P(\lambda)$ *wird das* **charakteristische Polynom von** A *genannt.*

Satz B.75 (Polynomeigenschaft von $P(A)$)

$P(\lambda)$ *ist ein Polynom* n*-ten Grades und hat die spezielle Form*

$$P(\lambda) \;=\; (-\lambda)^n + Tr(A)(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det(A)\,,$$

wobei

$$Tr(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\,i}$$

die Spur (engl. trace) der Matrix A *bezeichnet. Falls alle Elemente von* A *reell sind, so gilt dies auch für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (allerdings nicht für die Wurzeln).*

Bemerkung:

Die spezielle Form des n–ten, $(n-1)$–ten und konstanten Koeffizienten wird hier nicht bewiesen.

Beweis:

Durch Induktion nach n beweisen wir die etwas allgemeinere Behauptung:

> $P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda B)$ *ist für jedes Paar von Matrizen* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit* $B \;=\; (\beta_{ij})$ *ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich* n.

Induktionsanfang, $n = 1$: $\det(A - \lambda B) \;=\; \alpha_{1\,1} - \lambda\beta_{1\,1}$ ist offensichtlich ein Polynom vom Grade gleich 1.
Induktionsvorraussetzung: $\deg(\det(A - \lambda B)) \leq n$ sei erfüllt für n.
Induktionsschritt, $n \to n+1$:
Nach dem Entwicklungssatz gilt für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

$$\det(A - \lambda\, B) \;=\; \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{(j+1)}(\alpha_{1\,j} - \lambda\beta_{1\,j})\det(A_{1\,j} - \lambda\, B_{1\,j})$$

wobei $A_{1\,j}$ und $B_{1\,j}$ die durch Weglassen der ersten Zeile und j–ten Spalte aus A bzw. B gebildeten $n \times n$ Matrizen darstellen. Nach Induktionsvorraussetzung sind die Determinanten $\det(A_{1\,j} - \lambda B_{1\,j})$ Polynome vom Grade höchstens n, so daß die Multiplikation mit den linearen Faktoren $(\alpha_{1\,j} - \lambda\beta_{1\,j})$ den Grad höchstens auf $n+1$ erhöhen kann. $\square$

Algebraische Vielfachheit

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es $k \leq n$ verschiedene Nullstellen λ_i der Vielfachheit p_i, so daß das charakteristische Polynom geschrieben werden kann als

$$P(\lambda) \;=\; (\lambda_1 - \lambda)^{p_1}(\lambda_2 - \lambda)^{p_2} \ldots (\lambda_k - \lambda)^{p_k}$$

mit $\sum_{i=1}^{k} p_i \;=\; n$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \;=\; Tr(A)\,, \qquad\qquad \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{p_i} \;=\; \det(A)\,.$$

Die Zahl $p_i > 0$ heißt die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i.

Beispiel B.76

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 = (\mathbf{i} - \lambda)(-\mathbf{i} - \lambda) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = \mathbf{i}$ und $\lambda_2 = -\mathbf{i}$, beide mit der algebraischen Vielfachheit $p_1 = p_2 = 1$. Man prüft leicht die Identitäten

$$Tr(A) = 0{+}0 = 0 = \mathbf{i}{-}\mathbf{i} \quad \text{und} \quad \det(A) = 1 = \mathbf{i}\,(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i}^2 = -(-1)$$

Dabei ist $\mathbf{i}$ die *imaginäre Einheit* der komplexen Zahlen.

Berechnung der Eigenvektoren

Die zu einem Eigenwert λ_i gehörenden Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ lassen sich als Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0$$

bestimmen. Sie bilden einen linearen Unterraum der Dimension

$$q_i \equiv \dim(kern(A - \lambda_i I)) = n - rang(A - \lambda_i I)$$

Die Zahl $q_i > 0$ heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i und ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit p_i von λ_i:

$$q_i \leq p_i \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots k\,.$$

Eigenwerte λ_i mit $q_i < p_i$ heißen **defekt**.

Zum Eigenwert λ_i kann man immer q_i linear unabhängige Vektoren finden, die den Unterraum $kern(A - I\lambda_i)$ aufspannen. Weiterhin gilt die folgende Aussage bezüglich verschiedener Eigenwerte.

Lemma B.77

Die zu r verschiedenen Eigenwerten λ_i, $i = 1 \ldots r$, gehörenden Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i)_{i\,=\,1\ldots r}$ sind linear unabhängig.

Beweis:

Induktionsanfang, r=1: $\mathbf{v}_1$ ist wie jeder Eigenvektor definitionsgemäß ungleich Null und deshalb linear unabhängig, d.h.$\gamma_1\mathbf{v}_1 = 0$ kann nur mit $\gamma_1 = 0$ erfüllt werden.
Induktionsvoraussetzung, r: Die Menge der Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i)_{i\,=\,1\ldots r}$ sei linear unabhängig, d.h.

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbf{v}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 = \cdots = \gamma_r = 0\,.$$

Induktionsschritt, r → r+1: Es gelte für geeignete Koeffizienten γ_i

$$\sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = 0\,.$$

Fortsetzung Beweis

Multiplikation mit der Matrix A bzw. dem Skalar λ_{r+1} liefert

$$0 = A \cdot 0 = A \cdot \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i\, A\mathbf{v}_i = \boxed{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \lambda_i \mathbf{v}_i} + \boxed{\gamma_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}}$$

bzw.

$$0 = \lambda_{r+1} \cdot 0 = \lambda_{r+1} \cdot \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = \boxed{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \lambda_{r+1} \mathbf{v}_i} + \boxed{\gamma_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}}$$

Aus der Differenz dieser beiden Gleichungen fällt der letzte Term mit $\mathbf{v}_{r+1}$ ganz heraus:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i (\lambda_{r+1} - \lambda_i)\mathbf{v}_i\,.$$

Laut Induktionsannahme sind die $\mathbf{v}_i$, $i = 1 \ldots r$, linear unabhängig, also müssen die zusammengesetzten Koeffizienten $\gamma_i(\lambda_{r+1} - \lambda_i)$ alle gleich Null sein. Da die λ_i verschieden sind, gilt $\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0$, $i = 1 \ldots r$. Dies kann aber nur bedeuten, daß die Koeffizienten γ_i für $i = 1 \ldots r$ und damit auch γ_{r+1} gleich Null sind. Also ist auch die um einen Eigenvektor erweiterte Familie $\mathbf{v}_i$, $i = 1 \ldots r+1$, linear unabhängig. □

Eigenwertzerlegung von Matrizen

Sind nun alle Eigenwerte einfach oder zumindest nicht defekt, so kann man einen vollen Satz von n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ finden. Diese faßt man als Spalten zu einer quadratischen Matrix

$$V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

zusammen, welche auf Grund der linearen Unabhängigkeit ihrer Spaltenvektoren eine Inverse V^{-1} besitzt. Nun kann man die n Vektorgleichungen $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ mit Hilfe der Diagonalmatrix $\Lambda = diag(\lambda_i)_{i=1\ldots n}$ zur Matrixgleichung

$$A\,V = V\,\Lambda$$

kombinieren. Multipliziert man von links bzw. von rechts mit V^{-1} so erhält man die Darstellung

$$\Lambda = V^{-1} A\, V \qquad \text{bzw.} \qquad A = V\,\Lambda\, V^{-1}\,.$$

Eigenwerte bei speziellen Matrizen

Definition B.78 (Ähnlichkeitstransformation)

Gibt es für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix T, so daß

$TA = TB$ und damit auch $A = TBT^{-1}$ bzw. $B = T^{-1}A\,T$

gilt, so sagt man, die Matrizen A und B sind **ähnlich**. Die Überführung der Matrix B in A durch TBT^{-1} heisst **Ähnlichkeitstransformation**.

Daraus folgt mit $\det(T)\det(T^{-1}) = 1$ unmittelbar:

Folgerung B.79 (Eigenwerte ähnlicher Matrizen)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det(TBT^{-1} - \lambda TT^{-1})\\ &= \det(T(B-\lambda I)T^{-1})\\ &= \det(T)\det(B-\lambda\, I)\det(T^{-1})\\ &= \det(B-\lambda I)\end{aligned}$$

Also haben zueinander ähnliche Matrizen genau dasselbe charakteristische Polynom und damit auch dieselben Eigenwerte.

Verschiebung (Shift)

Addiert man zu einer Matrix A ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so verschieben sich die Eigenwerte entsprechend, da

$$\det((A+\mu I) - \lambda I) = \det(A - (\lambda-\mu)I)\,,$$

so daß λ genau dann ein Eigenwert von $(A+\mu I)$ ist, wenn $\lambda - \mu$ ein Eigenwert von A ist.

Transponierung

Selbst bei komplexen Matrizen läßt die Transponierung den Determinantenwert unverändert, so daß

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A-\lambda I)^T) = \det(A-\lambda I)\,.$$

Also haben A und A^T genau dieselben Eigenwerte, wobei die dazugehörigen Eigenvektoren im allgemeinen allerdings verschieden sind.

Konjugierte und symmetrische Matrizen

Da die Konjugierung von komplexen Zahlen sich auf Faktoren und Summanden überträgt, gilt

$$\overline{\det(A-\lambda I)} = \det(\overline{A-\lambda I}) = \det(\bar{A} - \overline{\lambda I}) = \det(\bar{A} - \bar{\lambda} I)\,,$$

so daß $\bar{\lambda}$ genau dann ein Eigenwert von $\bar{A}$ und damit auch $\bar{A}^T$ ist, wenn λ ein Eigenwert von A ist.
Da für reelle Matrizen $A = \bar{A}$ gilt, ist für diese mit jedem λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert. Das heißt:

Folgerung B.80 (Eigenwerte reeller Matrizen)

Alle Eigenwerte reeller Matrizen sind entweder reell oder treten als konjugiert–komplexe Paare $(\lambda, \bar{\lambda})$ auf.

Hermitesche Matrizen

Für diese Klasse von Matrizen sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren können sogar orthogonal zueinander gewählt werden. Es gilt nämlich

$$A\mathbf{v} \;=\; \lambda\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\mathbf{v}}^T\bar{A}^T \;=\; \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T\,,$$

und somit folgt durch Multiplikation der linken Gleichung von links mit $\bar{\mathbf{v}}^T$ und entsprechend der rechten Gleichung mit $\mathbf{v}$ von rechts, daß

$$\bar{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} \;=\; \lambda\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} \;=\; \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}\,,$$

wobei wir die Voraussetzung $\bar{A}^T = A$ benutzt haben. Da nun $\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ nicht Null ist, gilt $\lambda \;=\; \bar{\lambda}$, und der Eigenwert λ muß deshalb reell sein.

Praktische Berechnung der Eigenwerte

Der offensichtliche Weg Eigenwerte und die entsprechende Eigenvektoren zu berechnen, führt über das charakteristische Polynom $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Bei grösseren Dimensionen ist jedoch schon die Berechnung der Koeffizienten von $P(\lambda)$ sehr aufwendig. Ausserdem erhält man dann die Eigenwerte als Nullstellen von $P(\lambda)$ mit nur geringer Genauigkeit, da sie stark durch numerische Rundungsfehler beeinträchtigt werden.

Stattdessen führt man beim sogenannten **QR-Algorithmus** eine Folge von orthogonalen Ähnlichkeitstransformationen durch, die A sukzessive auf diagonale Form reduzieren (falls A wirklich diagonalisierbar ist). Der Gesamtaufwand dafür ist normalerweise mindestens $5n^3$ skalare Multiplikationen und damit ein Vielfaches der Kosten für eine **LU-Faktorisierung**. Deswegen wird die Eigenwertzerlegung nur in ganz speziellen Fällen zur Lösung linearer Systeme $Ax = b$ herangezogen.

Nutzung der Diagonalisierung

Eigenwertzerlegungen spielen besonders bei der Analyse sogenannter dynamischer Systeme eine zentrale Rolle.
Betrachtet man zum Beispiel eine lineare Evolutionsgleichung

$$x_{neu} = Ax_{alt} + b$$

so ergibt deren wiederholte Anwendung den k-ten Zustand von x beginnend mit $x = 0$ als einen Ausdruck der Form $Q_k(A)b$ mit

$$Q_k(A) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j A^j \;=\; V\sum_{j=0}^{k-1} q_j \Lambda^j V^{-1} \;=\; VQ_k(\Lambda)V^{-1}\,.$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen unter der Vorraussetzung dass $A = V\Lambda V^{-1}$ so dass insbesondere $A^j = V\Lambda^j V^{-1}$. Mit anderen Worten: Man kann V aus dem Matrixpolynom $Q_k(A)$ herausziehen, so dass dessen Verhalten gerade fuer grosse k durch $Q_k(\Lambda) = diag(Q_k(\lambda_j))_{j+1\ldots n}$ beschrieben ist.

Kanonische Jordanform

Einige Matrizen (wie zum Beispiel $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$) lassen sich nicht in die Form $A = V\Lambda V^{-1}$ mit Diagonalmatrix Λ bringen. Vielmehr bleiben in Λ noch einige Elemente in der Superdiagonalen zurück, die einen sogenannten **Jordanblock** bilden. Die vollständige Diagonalisierung gelingt hier nicht, weil der Eigenwert ($\lambda_1 = 1$) eine höhere algebraische ($p_1 = 2$) als geometrische Vielfachheit ($q_1 = 1$) besitzt, dh. defekt ist.

Dieser Effekt ist sehr speziell, da für ein beliebig kleines $\varepsilon \neq 0$ die gestörte Matrix

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1{+}\varepsilon\end{bmatrix}$$

zwei unterschiedlichen Eigenwerte (1 und $1 + \varepsilon$) hat und deshalb diagonalisierbar ist. Allerdings ist die entsprechende Matrix V^{-1} dann sehr gross und explodiert, wenn man ε immer kleiner macht.

Zusammenfassend bleibt festzustellen, dass die Eigenwertzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ ein wesentlich kniffligeres Problem darstellt als die Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.