A - 5 Modulare Arithmetik

Satz A.49 (Teilung mit Rest)
In $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ gibt es für jedes Paar $a, m \in \mathcal{M}$ mit $m > 0$ genau ein Paar $q, r \in \mathcal{M}$, so dass gilt:

$$a = qm + r \qquad \wedge \qquad 0 \leq r < m > 0.$$

Dabei wird r **Rest** *genannt, q ist der* **Quotient**.

Definition A.50 (Modulobezeichnung, Teilbarkeit, Primzahl)
(i) Da der Rest r oft wichtiger ist als der Quotient q schreibt man

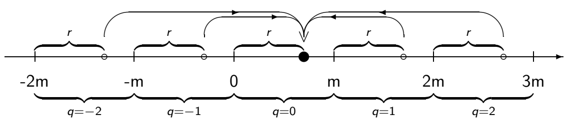
$$r = r_m(a) = a \bmod m$$

(sprich: r gleich "a modulo m").

(ii) Offenbar gilt $r_m(a) = 0$ genau dann wenn a durch m teilbar ist. Dann schreibt man $m|a$ (sprich "m teilt a").

(iii) Folgt aus $m|a$ immer $m \in \{1, a\}$ und ist $a \neq 1$, so heißt a **Primzahl**.

Zahlengerade



Beispiel A.51
$7 \bmod 3 = r_3(7) = 1 \quad (q = 2)$

Beispiel A.52
$-13 \bmod 5 = r_5(-13) = 2 \quad (q = -3)$

Bemerkung:
In der Programmiersprache C wird mod durch das Prozentzeichen % definiert:

$$a\%m = a - m\,(a/m) \qquad \text{für } a \geq 0 < m.$$

Da das Vorzeichen des Restes für negative a abhängig von der Implementation (also dem verwendeten Compiler) ist, gilt obige Gleichung nicht unbedingt.
Es erfolgt aber immer eine Rundung in Richtung Null:

$$a/m = -(-a/m) \qquad \text{für } a < 0 < m.$$

Satz A.53 (Modulare Arithmetik)

In $\mathbb{Z}_m \simeq \{0, 1, \cdots, m-1\}$ *wird durch*

$$a +_m b \;:=\; (a+b) \bmod m \;\equiv\; r_m(a+b)$$

und

$$a *_m b \;:=\; (a*b) \bmod m \;\equiv\; r_m(a*b)$$

eine **kommutative Ringstruktur** *definiert.*

Bemerkung

Bei komplexeren Ausdrücken ohne Division kann erst in $\mathbb{Z}$ gerechnet und nur zum Schluß auf $[0, m-1]$ modularisiert werden.

Mathematik für Informatiker I
└ Modulare Arithmetik

Satz A.54 (Fermat(1640))

Falls m *prim gilt für alle* $0 \le a < m$

$$a^m = a \bmod m.$$

Ist m *kein Teiler von* a*, gilt* $a^{m-1} \equiv 1 \mod p$*.*

Korollar A.55

$\mathbb{Z}_m$ *ist genau dann ein Integritätsbereich und damit nach Satz A.30 ein Körper, wenn* m *eine Primzahl ist. Dann gilt für alle* $a \in \mathbb{Z}_m$

$$a^{-1} \;=\; a^{m-2}.$$

Beispiel A.56

In $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ gilt:

$$\begin{array}{llll}
\bar{1}^{-1} = \bar{1}*\bar{1}*\bar{1} = & 1 \bmod 5 = \bar{1} & \Longrightarrow & \bar{1}*\bar{1} = \;\; 1 \bmod 5 = \bar{1} \\
\bar{2}^{-1} = \bar{2}*\bar{2}*\bar{2} = & 8 \bmod 5 = \bar{3} & \Longrightarrow & \bar{2}*\bar{3} = \;\; 6 \bmod 5 = \bar{1} \\
\bar{3}^{-1} = \bar{3}*\bar{3}*\bar{3} = & 27 \bmod 5 = \bar{2} & \Longrightarrow & \bar{3}*\bar{2} = \;\; 6 \bmod 5 = \bar{1} \\
\bar{4}^{-1} = \bar{4}*\bar{4}*\bar{4} = & 64 \bmod 5 = \bar{4} & \Longrightarrow & \bar{3}*\bar{4} = 16 \bmod 5 = \bar{1}
\end{array}$$

Mathematik für Informatiker I
└ Modulare Arithmetik

Multiplikation in $\mathbb{Z}_5$

$*$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Mathematik für Informatiker I
└ Modulare Arithmetik

Addition und Subtraktion in $\mathbb{Z}_5$

Subtraktion

Addition

$+ \backslash -$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$

/	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	–	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	–	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	–	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	–	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	–	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Anwendung: Hashing

Motivation:

Angenommen eine Firme hat allen ihren Angestellten eine 10 stellige Personalnummer k zugeordnet. Sie erwartet aber nie mehr als $m = 1000$ Angestellte zu haben und hat deshalb eine Registratur mit 1000 durchnumerierten Ablagen angelegt. Um schnell auf diese zugreifen zu können, sucht sie für $n = 10^{10}$ eine sogenannte **Hashfunktion**

$$h : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, m-1\},$$

so daß möglichst alle zu irgendeinem Zeitpunkt tatsächlich vorhandenen Personalnummern k einen "eigenen" Funktionswert $h(k)$ haben. Da die Menge $\mathcal{K}$ der vorhandene k aus datenschutzrechtlichen Gründen nie bekannt ist und sich zudem durch Personalfluktuation ändern kann, lässt sich für a priori gewählte h eine Kollision

$$h(k') = h(k) \qquad \text{mit} \quad k \neq k' \;\; \text{und} \;\; k, k' \leq n$$

nicht immer verhindern.

Fortsetzung: Hashing

Das gilt auch für die einfache **Hashfunktion**

$$h(k) = k \bmod p \qquad \text{mit} \quad p \geq m,$$

wobei p häufig als Primzahl gewählt wird.

Um für ein k mit einer bereits durch ein k' belegten Speicheradresse $h(k) = h(k')$ ein freies Ablagefach zu finden, wird in der Nähe von $h(k)$ **sondiert**.

Beim **quadratischen Sondieren** durchsucht man die Adressen

$$(h(k) + i^2) \bmod p \qquad \text{und} \qquad (h(k) - i^2) \bmod p$$

für $i = 1, 2, \cdots, (p-1)/2$, bis freies Fach gefunden wurde.
Setzt man voraus, daß mindestens ein freies Fach vorhanden ist, garantiert der folgende Satz den Erfolg des **quadratischen Sondierens**.

Satz A.57 (siehe Hartmann 4.24)

Ist p eine Primzahl mit $p \bmod 4 = 3$ so gilt:

$$\{\pm i^2 \bmod p : i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2\} \; = \; \{1, 2, \cdots, p-1\}$$

Mit anderen Worten: Alle Adressen werden durchsucht.

Beispiel A.58 (p = 11)

i	1	2	3	4	5
$i^2 \bmod 11$	1	4	9	5	3
$-i^2 \bmod 11$	10	7	2	6	8